Teoría Macroeconómica 2

Primer Parcial

Instrucciones generales: El examen es estrictamente individual, de lo contrario se aplicarán todas las normas disciplinarias especificadas en el Reglamento Académico Estudiantil. Muestre el razonamiento necesario para respaldar sus respuestas. No puede utilizar ningún dispositivo electrónico. La prueba tiene una duración de 3 horas.

1. **Política redistributiva y propensión marginal al consumo:** Considere un modelo de dos periodos que involucra dos tipos de hogares. En este escenario, existen γ hogares del tipo A que presentan las siguientes preferencias:

$$u\left(C_t, C_{t+1}\right) = \log\left(C_t\right) + \beta \log\left(C_{t+1}\right)$$

Además, hay $1-\gamma$ hogares tipo B que siguen una regla de consumo dada por:

$$C_t = a + b\left(Y_t + A_t\right)$$

Donde A_t representa una transferencia de suma fija que los hogares reciben del gobierno en el periodo t. Todos los hogares tienen un ingreso idéntico, y su nivel de ingreso $\{Y_t, Y_{t+1}\}$ está determinado de manera exógena. Suponga también que el gobierno realiza un gasto de 1 unidad de bien de consumo únicamente en el periodo t y, además, impone un impuesto de suma fija en el periodo $t+1$, denominado T_{t+1}, a todos los hogares con el propósito de cumplir su restricción presupuestaria intertemporal. Por último, suponemos que la tasa de interés, r_t, se mantiene siempre en cero.

a) Obtenga la restricción presupuestaria intertemporal del gobierno.
Se tiene que $G_{t+1} = 0$ y el gasto total del gobierno en el periodo t está dado por $(1-\gamma)A_t + 1$. El gobierno no cobra impuestos en el periodo t, solamente en

$t+1$. Además, $r_t = 0$. Así:

$$(1-\gamma)A_t + G_t = B_t^G$$
$$0 = \gamma T_{t+1} + (1-\gamma)T_{t+1} - B_t^G$$

Lleva a:

$$T_{t+1} = (1-\gamma)A_t + 1$$

b) Suponga que el hogar tipo A anticipa completamente la restricción presupuestaria intertemporal del gobierno. Obtenga la función de consumo para el hogar tipo A y denótela por C_t^A

Las restricción presupuestarias del hogar tipo A en cada periodo son:

$$C_t + S_t = Y_t$$
$$C_{t+1} = Y_{t+1} - T_{t+1} + S_t$$

Combinando:

$$C_{t+1} = Y_t - C_t + Y_{t+1} - T_{t+1}$$

El problema del hogar es

$$\max_{C_{t+1}} \log(C_t) + \beta \log(Y_t - C_t + Y_{t+1} - T_{t+1})$$

Esto lleva a la ecuación de Euler:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta$$

Incorporando en la restricción presupuestaria intertemporal del hogar:

$$C_t^A = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)(Y_t + Y_{t+1} - T_{t+1})$$

Dado que el hogar sabe que $T_{t+1} = (1-\gamma)A_t + 1$, entonces:

$$C_t^A = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)(Y_t + Y_{t+1} - (1-\gamma)A_t - 1)$$

c) Obtenga la función de consumo agregada, definida por:

$$C_t \equiv \gamma C_t^A + (1-\gamma)C_t^B$$

$$\begin{aligned} C_t &\equiv \gamma C_t^A + (1-\gamma)C_t^B \\ &= \left(\frac{\gamma}{1+\beta}\right)(Y_t + Y_{t+1} - (1-\gamma)A_t - 1) + (1-\gamma)\left(a + b\left(Y_t + A_t\right)\right) \\ &= (1-\gamma)a + \left(\frac{\gamma}{1+\beta}\right)(Y_{t+1} - 1) + \left(b - \frac{\gamma}{1+\beta}\right)(1-\gamma)A_t + \left(\frac{\gamma}{1+\beta} + (1-\gamma)b\right)Y_t \end{aligned}$$

d) Determine el efecto en el consumo agregado de un aumento en las transferencias que realiza el gobierno, A_t.Es decir, la magnitud y el signo de $\frac{\partial C_t}{\partial A_t}$. Explique intuitivamente cómo depende dicho efecto de la propensión marginal del consumo de cada tipo de hogar y de γ. (Pista: piense en el caso de un b muy alto, luego en el caso de un β muy bajo, separadamente).

De la expresión de consumo agregado obtenida en (c):

$$\frac{\partial C_t}{\partial A_t} = \left(b - \frac{\gamma}{1+\beta}\right)(1-\gamma)$$

Si $1-\gamma$ es alto, la política va a tener un impacto mayor sobre el consumo agregado, pues significa que la política de transferencias cubre una proporción más alta de la población total. El signo del efecto depende de $b - \frac{\gamma}{1+\beta}$. Si b es muy alto (PMC del hogar tipo B muy elevada), el signo del efecto es potencialmente positivo y el efecto es más alto. Esto porque los hogares tipo B van a consumir una fracción importante de la mayor transferencia que les otorgue el gobierno y estos agentes no son prospectivos. Si β es muy bajo, entonces los hogares tipo A tienen una propensión marginal al consumo muy alta, por lo que su consumo presente cae muy fuerte si su ingreso permanente se reduce producto del mayor impuesto que perciben que van a pagar por las transferencias más generosas que está haciendo el gobierno.

2. Considere un modelo estático de un periodo. Suponga que las preferencias para el consumo y el ocio son las siguientes:

$$u(C,N) = \log(C) + \alpha\log(1-N)$$

y que los hogares resuelven el siguiente problema de optimización:

$$\max_{C,N} u(C, 1-N)$$
$$\text{s.a. } C = w(1-\tau)N + T$$

a) Encuentre las condiciones de primer orden para la decisión de consumo-ocio.

$$\frac{\alpha C}{1-N} = w(1-\tau)$$

Así:

$$C = \frac{w(1-\tau)(1-N)}{\alpha}$$

b) Use la restricción presupuestaria para resolver la oferta laboral N. Debería obtener una expresión explícita para N en función de w, τ, T y α.
Usando la CPO obtenida en el inciso anterior dentro de la restricción presupuestaria del gobierno:

$$\begin{aligned}
\frac{w(1-\tau)(1-N)}{\alpha} &= w(1-\tau)N + T \\
w(1-\tau)(1-N) &= \alpha w(1-\tau)N + \alpha T \\
(1+\alpha)\, w(1-\tau)N &= w(1-\tau) - \alpha T \\
N &= \frac{w(1-\tau) - \alpha T}{(1+\alpha)\, w(1-\tau)}
\end{aligned}$$

c) Suponga que $T = 0$. ¿Cómo responde N a la tasa impositiva τ? ¿Por qué ocurre?
Si $T = 0$, entonces:

$$N = \frac{1}{(1+\alpha)}$$

Por lo que N no depende de τ. Esto porque el efecto ingreso y sustitución se cancelan completamente.

d) Ahora suponga que tanto en Europa como en Estados Unidos se tiene:

$$\alpha = 1.54$$
$$w = 1$$

pero en Estados Unidos, se tiene

$$\tau = 0.34$$
$$T = 0.102$$

mientras que en Europa, se tiene

$$\tau = 0.53$$
$$T = 0.124$$

Calcule la cantidad de trabajo elegida en los Estados Unidos y en Europa. Es decir, la fracción de su tiempo disponible que se trabaja en ambos países. Comente sobre el papel respectivo de los impuestos y las transferencias en este análisis utilizando sus respuestas a las partes (b) y (c).
Para EE.UU. se tiene $N^{US} = 0.3$ y para Europa, $N^{EU} = 0.234$. Es decir, los estadounidenses dedican un 30% de su tiempo al trabajo y los europeos 23.4%. Según el modelo, esto sería por los impuestos y las transferencias más altas en Europa.

e) Suponiendo que la función de producción es $Y = N$, ¿cuánto más bajo es el PIB per cápita en Europa en comparación con los Estados Unidos (en términos porcentuales)?
Para EE.UU. se tiene $Y^{US} = 0.3$ y para Europa, $Y^{EU} = 0.234$. Así, el PIB per cápita en Europa es $1 - \frac{0.234}{0.3} = 22\%$ más bajo.

f) Utilice su respuesta a la parte (a) para obtener una expresión para la oferta de trabajo N en función de $w(1-\tau), \alpha$ y C. La idea es mantener constante el consumo, por lo que no reemplace C usando la restricción presupuestaria como hizo en la parte (b).

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha C}{1-N} &= w(1-\tau) \\
1 - N &= \frac{\alpha C}{w(1-\tau)} \\
N &= 1 - \frac{\alpha C}{w(1-\tau)} \\
&= \frac{w(1-\tau) - \alpha C}{w(1-\tau)}
\end{aligned}$$

g) Utilice su respuesta a la parte (f) para mostrar que $\frac{\partial N}{\partial w(1-\tau)} \frac{w(1-\tau)}{N} = \frac{1-N}{N}$, es decir, la elasticidad de la oferta de trabajo con respecto a los salarios después de impuestos, manteniendo constante el consumo.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial w(1-\tau)} \frac{w(1-\tau)}{N} &= \frac{\alpha C}{(w(1-\tau))^2} \frac{w(1-\tau)}{1 - \frac{\alpha C}{w(1-\tau)}} \\
&= \frac{\alpha C}{w(1-\tau) - \alpha C} \\
&= \frac{\alpha C}{w(1-\tau)} \frac{w(1-\tau)}{w(1-\tau) - \alpha C} \\
&= \frac{1-N}{N}
\end{aligned}$$

h) Sustituya los valores de α, τ, w y N que encontró para el caso de Estados Unidos en la expresión de elasticidad. ¿Qué número obtiene? Las estimaciones empíricas de esta elasticidad suelen estar en el rango de 0.4 a 1. ¿Cómo se compara eso con la elasticidad implícita en este modelo? ¿Por qué es importante para nuestras conclusiones sobre la política fiscal?

i) Usando $N^{US} = 0.3$, entonces $\frac{\partial N}{\partial w(1-\tau)} \frac{w(1-\tau)}{N} = 2.33$, que es un valor muchísimo más alto que el rango encontrado en la literatura. Es decir, el modelo necesita que la oferta laboral sea muy sensible al salario para que las cargas tributarias expliquen la diferencia de ingreso entre EE.UU. y Europa. Si se ignora este hecho, entonces se estarían haciendo recomendaciones de política erróneas.

3. **Teorema Modigliani-Miller con tres periodos:** Considere una empresa que opera durante tres períodos. Su función de producción está dada por:

$$Y = AK^{\alpha}N^{1-\alpha} \quad \text{con} \quad 0 < \alpha < 1$$

El stock de capital en el periodo t está exógenamente dado. La empresa puede influir en su stock de capital futuro a través de la inversión. El capital se acumula de acuerdo con:

$$K_{t+j+1} = I_{t+j} + (1-\delta)K_{t+j} \quad \text{para } j = 0, 1, 2$$

La empresa se liquida a sí misma (es decir, vende el capital restante que no se ha depreciado durante el período) al final del tercer período. El objetivo de la empresa es maximizar su valor, dado por:

$$V = D_t + \frac{D_{t+1}}{1+r} + \frac{D_{t+2}}{(1+r)^2}$$

donde D denota las ganancias, que se pagan como dividendos a sus propietarios, y la empresa toma la tasa de interés como dada. La empresa financia una fracción $q \in [0,1]$ de la inversión mediante capital propio en cada periodo, mientras que $1-q$ es la fracción de la inversión financiada mediante deuda. Los bonos para financiar la inversión están ligados a una tasa de interés real r, que es constante en el tiempo.

a) Escriba los dividendos de la empresa en cada periodo.
La condición terminal es $K_{t+3} = 0$. Así, el capital físico evoluciona de acuerdo con:

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t$$
$$K_{t+2} = I_{t+1} + (1-\delta)K_{t+1}$$
$$I_{t+2} = -(1-\delta)K_{t+2}$$

Por tanto, los dividendos en cada periodo son:

$$D_t = A_t F(K_t, N_t) - w_t N_t - q\left(K_{t+1} - (1-\delta)K_t\right)$$
$$D_{t+1} = A_{t+1} F(K_{t+1}, N_{t+1}) - w_{t+1} N_{t+1} - q\left(K_{t+2} - (1-\delta)K_{t+1}\right) - (1+r_t)(1-q)\left(K_{t+1} - (1-\delta)K_t\right)$$
$$D_{t+2} = A_{t+2} F(K_{t+2}, N_{t+2}) - w_{t+2} N_{t+2} + (1-\delta)K_{t+2} - (1+r_{t+1})(1-q)\left(K_{t+2} - (1-\delta)K_{t+1}\right)$$

b) Escriba el problema de optimización de la empresa. ¿Cuáles son sus variables de elección?

$$\max_{N_t, N_{t+1}, N_{t+2}, K_{t+1}, K_{t+2}} V = D_t + \frac{D_{t+1}}{1+r} + \frac{D_{t+2}}{(1+r)^2}$$

Con

$$D_t = A_t F(K_t, N_t) - w_t N_t - q\left(K_{t+1} - (1-\delta)K_t\right)$$
$$D_{t+1} = A_{t+1} F(K_{t+1}, N_{t+1}) - w_{t+1} N_{t+1} - q\left(K_{t+2} - (1-\delta)K_{t+1}\right) - (1+r)(1-q)\left(K_{t+1} - (1-\delta)K_t\right)$$
$$D_{t+2} = A_{t+2} F(K_{t+2}, N_{t+2}) - w_{t+2} N_{t+2} + (1-\delta)K_{t+2} - (1+r)(1-q)\left(K_{t+2} - (1-\delta)K_{t+1}\right)$$

c) Obtenga la condición de optimalidad para la demanda laboral de la empresa en cada periodo.

$$\frac{\partial V}{\partial N_{t+1}} = A_t F_N(K_t, N_t) = w_t$$
$$\frac{\partial V}{\partial N_{t+1}} = A_{t+1} F_N(K_{t+1}, N_{t+1}) = w_{t+1}$$
$$\frac{\partial V}{\partial N_{t+2}} = A_{t+2} F_N(K_{t+2}, N_{t+2}) = w_{t+2}$$

d) Resuelva algebraicamente la elección óptima de inversión de la empresa en cada periodo. Interprete cada condición.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}} &= -q + \left(\frac{1}{1+r}\right)(A_{t+1}F_K(K_{t+1}, N_{t+1}) + q(1-\delta) - (1+r)(1-q)) + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 (1+r)(1-\delta)(1-q) = \\
&\Leftrightarrow -q + \left(\frac{1}{1+r}\right)(A_{t+1}F_K(K_{t+1}, N_{t+1}) + q(1-\delta)) - (1-q) + \left(\frac{1}{1+r}\right)(1-\delta)(1-q) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+r}\right)(A_{t+1}F_K(K_{t+1}, N_{t+1}) + q(1-\delta)) + \left(\frac{1}{1+r}\right)(1-\delta)(1-q) = 1 \\
&\Leftrightarrow A_{t+1}F_K(K_{t+1}, N_{t+1}) + q(1-\delta) + (1-\delta)(1-q) = 1+r \\
&\Leftrightarrow A_{t+1}F_K(K_{t+1}, N_{t+1}) + (1-\delta) = 1+r \\
&\Leftrightarrow A_{t+1}F_K(K_{t+1}, N_{t+1}) = r+\delta
\end{aligned}$$

Similarmente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial K_{t+2}} &= -\left(\frac{1}{1+r}\right)q + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 (A_{t+2}F_K(K_{t+2}, N_{t+2}) + (1-\delta) - (1+r)(1-q)) = 0 \\
&\Leftrightarrow -q - (1-q) + \left(\frac{1}{1+r}\right)(A_{t+2}F_K(K_{t+2}, N_{t+2}) + (1-\delta)) = 0 \\
&\Leftrightarrow A_{t+2}F_K(K_{t+2}, N_{t+2}) = r+\delta
\end{aligned}$$

e) ¿Hay alguna diferencia en la asignación óptima de capital y trabajo en los siguientes casos?

1) La empresa financia completamente su inversión con endeudamiento ($q = 0$)
2) La empresa financia su inversión completamente con capital propio ($q = 1$).
3) La empresa financia su inversión de manera mixta ($q \in (0, 1)$).
De las condiciones de optimalidad derivadas anteriormente, no hay ninguna diferencia en la asignación óptima de capital y trabajo en ninguno de los

casos anteriores.