EC3201 Teoría Macroeconómica 2
I Examen-Soluciones

Prof. Jonathan Garita

II-2024

1. **(Valoración de dos activos financieros)** Considere un modelo intertemporal de consumo y ahorro de dos períodos con un hogar representativo. Las preferencias del hogar están dadas por:

$$U = \log(C_t) + \beta \log(C_{t+1})$$

En el mercado de fondos prestables hay dos tipos de bonos. Cada unidad de bono *Alpha* promete una unidad de bien de consumo en el período $t+1$ y se transa en el mercado a un precio q_t^α en el período t. Sea $\{B_{t+j}^\alpha\}_{j=-1,0,1}$ la cantidad de bonos tipo *Alpha* que decide mantener el hogar en cada período. Suponga que inicialmente hay un solo de estos bonos y que el hogar es dueño de dicho bono al inicio del período t.

Cada unidad de bono *Gamma*, por su parte, promete $D \geq 0$ unidades de bien de consumo en el período $t+1$, se transa en el mercado a un precio q_t^γ en el período t y $\{B_{t+j}^\gamma\}_{j=-1,0,1}$ denota la tenencia de bonos *Gamma* que decide mantener el hogar en cada período. Al igual que en el caso anterior, suponga que inicialmente hay un solo de estos bonos *Gamma* y que el hogar es dueño de dicho bono al inicio del período t.

El hogar recibe de forma exógena una dotación de bien de consumo Y_t y Y_{t+1}. Suponga que no hay otro activo financiero en la economía.

(a) Plantee el problema del hogar y obtenga las condiciones de primer orden para C_t, C_{t+1}, B_t^α y B_t^γ.

$$\begin{gathered}\max_{C_t, C_{t+1}, B_t^\alpha, B_t^\gamma} \log(C_t) + \beta \log(C_{t+1}) \\ \text{s.a.} \\ C_t + q_t^\alpha B_t^\alpha + q_t^\gamma B_t^\gamma = Y_t + q_t^\alpha B_{t-1}^\alpha + q_t^\gamma B_{t-1}^\gamma \\ C_{t+1} = Y_{t+1} + B_t^\alpha + D B_t^\gamma\end{gathered} \tag{1}$$

Sea λ_t el multiplicador de Lagrange asociado a la primera restricción y λ_{t+1} el asociado a la segunda restricción.

Las condiciones de primer orden (CPO) son:

$$\frac{1}{C_t} = \lambda_t$$
$$\frac{\beta}{C_{t+1}} = \lambda_{t+1}$$
$$-q_t^{\alpha}\lambda_t + \lambda_{t+1} = 0$$
$$-q_t^{\gamma}\lambda_t + \lambda_{t+1}D = 0$$

(b) Simplifique las condiciones de primer orden y obtenga la relación de equilibrio entre q_t^{α} y q_t^{γ}.

Las CPO de B_t^{α} y B_t^{γ} implican que:

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_{t+}} = q_t^{\alpha} \tag{2}$$

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_{t+}} = \frac{q_t^{\gamma}}{D} \tag{3}$$

Combinando, tenemos que:

$$q_t^{\alpha} = \frac{q_t^{\gamma}}{D} \tag{4}$$

(c) Utilice el resultado anterior, la ecuación de Euler y las condiciones de aclaramiento del mercado de fondos prestables para obtener $C_t, C_{t+1}, q_t^{\alpha}$ y q_t^{γ} en el equilibrio final.

Combinando las condiciones de optimalidad para C_t y C_{t+1}:

$$\frac{C_{t+1}}{\beta C_t} = \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_{t+}} = q_t^{\alpha} = \frac{q_t^{\gamma}}{D} \tag{5}$$

El mercado de fondos prestables se aclara si:

$$B_t^{\alpha} = B_{t-1}^{\alpha} = 1 \tag{6}$$
$$B_t^{\gamma} = B_{t-1}^{\gamma} = 1 \tag{7}$$

Utilizando el resultado anterior en la restricción presupuestaria del periodo t y $t+1$:

$$C_t = Y_t \tag{8}$$
$$C_{t+1} = Y_{t+1} \tag{9}$$

Así, usando la ecuación de Euler

$$q_t^\alpha = \frac{Y_{t+1}}{\beta Y_t} \tag{10}$$

$$q_t^\gamma = \frac{Y_{t+1}}{\beta Y_t} D \tag{11}$$

(d) Explique cómo cambiarían C_t, C_{t+1}, q_t^α y q_t^γ ante un aumento en D y la intuición económica detrás de cada cambio.

Las variables endógenas de equilibrio vienen dadas por:

$$C_t = Y_t$$
$$C_{t+1} = Y_{t+1}$$
$$q_t^\alpha = \frac{Y_{t+1}}{\beta Y_t}$$
$$q_t^\gamma = \frac{Y_{t+1}}{\beta Y_t} D$$

Un aumento en D no tiene efectos sobre el consumo presente ni el consumo futuro. Esto porque la disponibilidad de recursos (las dotaciones) no cambian. Además, el precio del bono *Alpha* tampoco cambia. Sin embargo, el precio del bono *Gamma* aumenta. Esto se debe a que, como el bono *Gamma* paga mayor retorno, entonces es más apetecido por los hogares. Ante ello, debe aumentar su precio para aclarar el mercado de fondos prestables. Ni el consumo ni el ahorro cambian porque la restricción agregada de recursos no cambia en la economía.

2. **(Propensión marginal a consumir y tasas de interés)**: Considere un modelo intertemporal de consumo y ahorro de dos períodos con un hogar representativo. Las preferencias del hogar están dadas por:

$$U = \min\{C_t, C_{t+1}\}$$

El hogar recibe de forma exógena una dotación de bien de consumo Y_t y Y_{t+1}. Sea $\{S_{t+j}\}_{j=0,1}$ el stock de ahorro del hogar en cada periodo y sea r_t la tasa de interés real asociada al stock generado en el periodo t.

(a) Plantee el problema del hogar y obtenga la función de consumo presente C_t y el ahorro S_t.

$$\begin{gathered} \max_{C_t, C_{t+1}} \min\{C_t, C_{t+1}\} \\ \text{s.a.} \\ C_t + S_t = Y_t \\ C_{t+1} = Y_{t+1} + (1+r_t)S_t \end{gathered} \tag{12}$$

Dadas las preferencias, se tiene que el hogar decide suavizar perfectamente el consumo:

$$C_t = C_{t+1}$$

Así, introduciendo en la restricción presupuestaria intertemporal:

$$\begin{aligned} C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r_t} &= Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t} \\ C_t + \frac{C_t}{1+r_t} &= Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t} \\ C_t\left(\frac{2+r_t}{1+r_t}\right) &= Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t} \\ C_t = \left(\frac{1+r_t}{2+r_t}\right)&\left(Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right) \end{aligned}$$

La función de ahorro viene dada por:

$$\begin{aligned} S_t &= Y_t - C_t \\ S_t &= Y_t - \left(\frac{1+r_t}{2+r_t}\right)\left(Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right) \\ S_t &= \left(\frac{1}{2+r_t}\right)Y_t - \frac{Y_{t+1}}{2+r_t} \end{aligned}$$

(b) Suponga que el hogar experimenta un choque transitorio en Y_t. Considere dos escenarios: uno con una tasa de interés real alta r_t y otro con una tasa baja r_t. ¿Difiere la propensión marginal a consumir ante el choque transitorio de ingreso en ambos escenarios? Si es así, explique intuitivamente por qué; si no, también justifique su respuesta.

$$PMC \equiv \frac{\partial C_t}{\partial Y_t} = \frac{1+r_t}{2+r_t} > 0$$

La PMC es creciente en r_t:

$$\frac{\partial PMC}{\partial r_t} = \frac{1}{(2+r_t)^2} > 0$$

Bajo la función de utilidad dada, el hogar busca suavizar su consumo de manera perfecta. Si el flujo de ingresos del hogar es asimétrico (i.e. $Y_t \neq Y_{t+1}$), buscará endeudarse o ahorrar para suavizar dicha asimetría. Si el hogar es inicialmente ahorrante ($Y_t > Y_{t+1}$), un choque transitorio en Y_t intensificará la asimetría de ingresos, mientras que un hogar inicialmente deudor ($Y_t < Y_{t+1}$) verá dicha asimetría reducirse. En un escenario con altas tasas de interés, el hogar suaviza su consumo a un costo elevado si es deudor o recibe un alto premio si es ahorrante. Por lo tanto, en este contexto, el hogar tenderá a consumir una mayor proporción de su ingreso *extra*, ya que la asimetría se alivia y es más sencillo suavizar el consumo. En un escenario de bajas tasas de interés, el hogar ahorrante consumirá una menor proporción de su ingreso *extra*, dado que suavizar el consumo resulta más costoso, mientras que un hogar deudor verá aliviada su asimetría de ingresos y necesitará pedir menos prestado.

3. **(Aclaramiento en el mercado de fondos prestables)**: Considere una economía de producción de dos períodos. El problema del hogar representativo viene dado por:

$$\max_{C_t, C_{t+1}} u(C_t) + \beta u(C_{t+1})$$
$$\text{s.a.}$$
$$C_t + S_t = w_t N_t + D_t$$
$$C_{t+1} = w_{t+1} N_{t+1} + (1 + r_t) S_t + D_{t+1} + D^I_{t+1}$$

La empresa representativa utiliza trabajo y capital físico para producir, siguiendo la tecnología:

$$Y_{t+j} = A_{t+j} F(N_{t+j}, K_{t+j}) \quad \forall j = 0, 1$$

El capital evoluciona de acuerdo con la ley de movimiento:

$$K_{t+j+1} = (1 - \delta) K_{t+j} + I_{t+j} \quad \forall j = 0, 1$$

La empresa financia una proporción $q \in (0, 1)$ de su inversión con recursos propios, mientras que financia una proporción $1 - q$ con endeudamiento.

Suponga que el hogar ahorra a una tasa de interés real r_t, mientras que la empresa debe endeudarse a una tasa de interés de $r_t + f_t$, con $f_t > 0$.

(a) Muestre que si el mercado de fondos prestables se aclara, entonces se cumple simultáneamente que:

$$Y_t = C_t + I_t$$
$$Y_{t+1} = C_{t+1} + I_{t+1}$$

El mercado de fondos prestables se aclara si:

$$S_t = (1-q)I_t$$

La restricción presupuestaria del hogar en el periodo t en equilibrio viene dada por:

$$\begin{aligned}
C_t + S_t &= w_t N_t + D_t \\
C_t + S_t &= w_t N_t + (Y_t - w_t N_t - qI_t) \\
C_t + S_t &= w_t N_t + (Y_t - w_t N_t - qI_t) \\
C_t + (1-q)I_t &= w_t N_t + (Y_t - w_t N_t - qI_t) \\
C_t + I_t &= Y_t
\end{aligned}$$

La restricción presupuestaria del hogar en el periodo $t+1$ en equilibrio viene dada por:

$$\begin{aligned}
C_{t+1} &= w_{t+1}N_{t+1} + (1+r_t)S_t + D_{t+1} + D^I_{t+1} \\
C_{t+1} &= w_{t+1}N_{t+1} + (1+r_t)S_t + \\
&\quad (Y_{t+1} + (1-\delta)K_{t+1} - w_{t+1}N_{t+1} - (1-q)(1+r_t+f_t)I_t) + \\
&\quad ((r_t+f_t)I_t - r_t S_t) \\
C_{t+1} &= (1+r_t)(1-q)I_t + \\
&\quad (Y_{t+1} + (1-\delta)K_{t+1} - (1-q)(1+r_t+f_t)I_t) + \\
&\quad ((r_t+f_t)I_t - r_t(1-q)I_t) \\
C_{t+1} &= Y_{t+1} + (1-\delta)K_{t+1} \\
C_{t+1} - (1-\delta)K_{t+1} &= Y_{t+1} \\
C_{t+1} + I_{t+1} &= Y_{t+1}
\end{aligned}$$