EC3201 Teoría Macroeconómica 2
I Examen

Prof. Jonathan Garita

I-2025

1. **(Efectos redistributivos de los impuestos a la herencia)** Suponga una economía de $T+1$ periodos que está habitada por dos tipos de hogares. Cada hogar tipo 1 recibe una herencia de herencia $H > 0$ unidades de bien de consumo en el primer periodo, t. Por su parte, cada hogar tipo 2 no recibe herencia alguna. Ambos tipos de hogares reciben exactamente el mismo flujo de dotación: $\{Y_t, Y_{t+1}, \dots Y_{t+T}\}$.

   Las preferencias de todos los hogares son idénticas y dadas por:

   $$U = \sum_{j=0}^{T} \beta^j u(C_{t+j}) \tag{1}$$

   Con $\beta \in (0,1)$ el factor de descuento y $u(\cdot)$ una función de utilidad con las propiedades estándar vistas en clase. Suponga que la cantidad de hogares tipo 1 está dada por $\gamma > 0$ y la cantidad de hogares tipo 2 está dada por $1-\gamma > 0$. Finalmente, suponga que la tasa de interés es constante e igual a r para todos los periodos y que $\beta(1+r) = 1$.

   (a) Defina $W \equiv \left(\sum_{j=0}^{T} \frac{Y_{t+j}}{(1+r)^j}\right)$. Muestre que la función de consumo para un hogar con herencia $\left(C^H\right)$ y para un hogar sin herencia $\left(C^{NH}\right)$ están dadas por [1]:

   $$C^H = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(W+H) \tag{2}$$
   $$C^{NH} = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(W) \tag{3}$$

   Como $\beta(1+r) = 1$, entonces $C^H_{t+j} = C^H$ y $C^{NH}_{t+j} = C^{NH}$ para todo $j = 0, \dots, T$. El ingreso permanente del hogar con herencia es $W + H$, mientras

[1] Recuerde que $1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^T = \frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta}$.

que el del hogar sin herencia es W. Así, usando la restricción presupuestaria intertemporal:

$$\sum_{j=0}^{T} \frac{C_{t+j}^{H}}{(1+r)^{j}} = W + H \tag{4}$$

$$\sum_{j=0}^{T} \frac{C^{H}}{(1+r)^{j}} = W + H \tag{5}$$

$$C^{H} \sum_{j=0}^{T} \beta^{j} = W + H \tag{6}$$

$$C^{H} \cdot \frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta} = W + H \tag{7}$$

$$C^{H} = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(W + H) \tag{8}$$

Como el ingreso permanente del hogar sin herencia es W y las preferencias son idénticas, entonces:

$$C^{NH} = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right) W \tag{9}$$

(b) Basado en su respuesta anterior, muestre que el consumo de un hogar con herencia es persistentemente más alto que el hogar sin herencia para todo el ciclo de vida, a pesar que el perfil de ingreso y las preferencias son idénticas.

$$C^{H} = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(W + H) \tag{10}$$

$$C^{NH} = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(W) \tag{11}$$

Entonces el consumo del hogar con herencia es mayor al de sin herencia en $\left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(H)$ unidades para todos los periodos. Esto porque el hogar con herencia empieza con una dotación adicional de recursos que puede distribuir sobre su ciclo de vida.

(c) Muestre que el consumo agregado de esta economía para el periodo t viene dado por:

$$C = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(\gamma(W + H) + (1-\gamma)W) \tag{12}$$

$$= \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(W + \gamma H) \tag{13}$$

$$C = \gamma C^H + (1-\gamma)C^{NH} \tag{14}$$
$$C = \gamma \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(W+H) + (1-\gamma)\left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(W) \tag{15}$$
$$C = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(\gamma(W+H)+(1-\gamma)W) \tag{16}$$
$$C = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(W+\gamma H) \tag{17}$$

Suponga que se establece un impuesto a las herencias, según el cual una fracción τ del valor heredado debe ser pagada por los hogares que reciben dicha herencia. El gobierno transfiere la recaudación total de este impuesto de forma equitativa entre los hogares que no reciben herencia. En consecuencia, cada hogar con herencia paga τH en el periodo t, y toda la recaudación se redistribuye entre los hogares sin herencia. De este modo, cada hogar sin herencia recibe una transferencia de $\frac{\gamma\tau H}{1-\gamma}$, que corresponde al monto total recaudado dividido entre el número de hogares elegibles para recibirla.

(d) Obtenga la función de consumo de cada tipo de hogar como en el inciso (a). Muestre cuál tipo de hogar experimenta un aumento de consumo y en qué magnitud.

La renta permanente de cada hogar con herencia pasa a ser $W + (1-\tau)H$. Mientras que la renta permanente de cada hogar sin herencia pasa a ser $W + \frac{\gamma\tau H}{1-\gamma}$. Entonces, usando la función de consumo:

$$C^H = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(W+(1-\tau)H) \tag{18}$$
$$C^{NH} = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)\left(W+\frac{\gamma\tau H}{1-\gamma}\right) \tag{19}$$

Por tanto, el hogar con herencias experimenta una reducción, mientras que el hogar sin herencias un aumento en el consumo.

(e) Obtenga el consumo agregado como en el inciso (c). ¿Qué condiciones debe tener los principales parámetros para que el consumo agregado sea mayor? Explique la intuición de su resultado.

Vimos que:

$$C^H = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(W+(1-\tau)H) \tag{20}$$
$$C^{NH} = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)\left(W+\frac{\gamma\tau H}{1-\gamma}\right) \tag{21}$$

Sumando ambos y ponderando por el tamaño relativo de cada tipo de hogar:

$$C = \gamma\left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(W + (1-\tau)H) + (1-\gamma)\left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)\left(W + \frac{\gamma\tau H}{1-\gamma}\right)$$
$$C = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)\left(\gamma(W + (1-\tau)H) + (1-\gamma)\left(W + \frac{\gamma\tau H}{1-\gamma}\right)\right)$$
$$C = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(\gamma(1-\tau)H + W + \gamma\tau H)$$
$$C = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)(\gamma H + W)$$

Que es el mismo consumo agregado. Esto se debe a que la dotación agregada de recursos, tanto temporal como intertemporal, no cambia. Simplemente hay una redistribución de la riqueza.

2. **(Modelo de producción:)** Suponga una economía compuesta por un hogar representativo y una empresa representativa. No existe gobierno, no hay dinero, todo está expresado en términos reales y no hay incertidumbre. Las preferencias del hogar están dadas por:

$$\ln C_t + \theta_t \ln(1-N_t) + \beta\Big[\ln C_{t+1} + \theta_{t+1}\ln(1-N_{t+1})\Big] \tag{22}$$

resuelve el siguiente problema:

El hogar es dueño de la empresa. Así, el hogar recibe los dividendos D_t y D_{t+1} que genere la empresa en cada periodo. Estos se toman como dados por el hogar. El hogar inicia sin riqueza o deuda ($S_{t-1} = 0$).

La empresa representativa produce output conforme a la función:

$$Y_{t+j} = A_{t+j}K_{t+j}^{\alpha}N_{t+j}^{1-\alpha} \quad j = 0, 1.$$

La empresa se ve obligada a endeudarse para financiar toda la inversión en el periodo t. Suponga que la empresa se endeuda a la misma tasa r_t que el hogar obtiene por ahorrar. La inversión se convierte en nuevo capital a través de la siguiente relación:

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t.$$

(a) Plantee el problema del hogar. Simplifique para que sea un problema de elección de cuatro variables: $C_t, C_{t+1}, N_t, N_{t+1}$.. Obtenga las cuatro condiciones de optimalidad que caracterizan la decisión óptima del hogar. No es necesario resolver.

$$\max_{C_t,N_t,S_t} U = \ln C_t + \theta_t \ln(1-N_t) + \beta\left[\ln C_{t+1} + \theta_{t+1}\ln(1-N_{t+1})\right]$$
$$\text{s.a.} \tag{23}$$
$$C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r_t} = w_t N_t + D_t + \frac{w_{t+1}N_{t+1} + D_{t+1}}{1+r_t}$$

La condición intratemporal (oferta laboral), está dada por:

$$\frac{\theta_t C_t}{1-N_t} = w_t \tag{24}$$
$$\frac{\theta_{t+1} C_{t+1}}{1-N_{t+1}} = w_{t+1} \tag{25}$$

La condición intertemporal o la Ecuación de Euler es:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta(1+r_t) \tag{26}$$

Finalmente, como son cuatro variables de elección $(C_t, C_{t+1}, N_t, N_{t+1})$, la restricción presupuestaria intertemporal es la cuarta condición que garantiza la solución al problema:

$$C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r_t} = w_t N_t + D_t + \frac{w_{t+1}N_{t+1} + D_{t+1}}{1+r_t} \tag{27}$$

(b) Plantee el problema de la empresa como un problema de optimización para maximizar el valor presente descontado de los dividiendos. Obtenga la condición de optimalidad que caracteriza la demanda laboral de cada periodo y la de inversión.

$$\max_{N_t,I_t} \quad V_t = A_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - w_t N_t +$$
$$\frac{1}{1+r_t}\left[A_{t+1}K_{t+1}^{\alpha}N_{t+1}^{1-\alpha} - w_{t+1}N_{t+1} + (1-\delta)K_{t+1} - (1+r_t)(K_{t+1} - (1-\delta)K_t)\right]$$

La condición de optimalidad que caracteriza la demanda laboral está dada por:

$$(1-\alpha)A_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} = w_t \tag{28}$$
$$(1-\alpha)A_{t+1} K_{t+1}^{\alpha} N_{t+1}^{-\alpha} = w_{t+1} \tag{29}$$

La condición de optimalidad que caracteriza la inversión está dada por:

$$\alpha A_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} = r_t + \delta \tag{30}$$
$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \tag{31}$$

3. **(Mercado de Trabajo):** Considere un modelo de un periodo del hogar (modelo estático). El hogar obtiene utilidad del consumo, C_t, y del ocio, L_t. La oferta laboral en horas está dada por N_t y el hogar tiene H horas disponibles para distribuir entre ocio y trabajo, tal que $H = L_t + N_t$. El hogar obtiene ingresos laborales $w_t N_t$, tomando como dado el salario w_t. Las preferencias del hogar están dadas por:

$$U(C_t, L_t) = \frac{1}{2}C_t + \theta_t\sqrt{L_t} \tag{32}$$

(a) Obtenga una expresión para la oferta laboral del hogar representativo. (Para simplificar, suponga que el hogar no tiene ingresos no laborales).

El problema del hogar es:

$$\max_{C_t, N_t, L_t} \quad \frac{1}{2}C_t + \theta_t\sqrt{L_t} \tag{33}$$

$$\text{s.a.} \tag{34}$$

$$C_t = w_t N_t \tag{35}$$

$$H = N_t + L_t \tag{36}$$

Simplificando:

$$\max_{N_t} \quad \frac{1}{2}w_t N_t + \theta_t\sqrt{H - N_t} \tag{37}$$

La CPO está dada por:

$$\frac{1}{2}w_t - \frac{1}{2}\theta_t(H - N_t)^{-1/2} = 0 \tag{38}$$

$$(H - N_t)^{1/2} = \frac{\theta_t}{w_t} \tag{39}$$

$$(H - N_t) = \left(\frac{\theta_t}{w_t}\right)^2 \tag{40}$$

$$N_t = H - \left(\frac{\theta_t}{w_t}\right)^2 \tag{41}$$

(b) ¿Puede el efecto ingreso llegar a dominar al efecto sustitución para este hogar?¿Bajo qué condiciones el hogar consumirá únicamente ocio (es decir, no trabajará en absoluto en el mercado)?

La oferta laboral del hogar es:

$$N_t = H - \left(\frac{\theta_t}{w_t}\right)^2 > 0 \tag{42}$$

Note que

$$\frac{\partial N_t}{\partial w_t} = \frac{\theta_t^2}{w_t^3}$$

Por lo que la oferta laboral siempre es creciente en w_t. Es decir, el efecto sustitución siempre domina. Además, la oferta laboral es mayor a cero si:

$$H - \left(\frac{\theta_t}{w_t}\right)^2 > 0 \tag{43}$$

$$w_t^2 > \frac{\theta_t^2}{H} \tag{44}$$

$$w_t > \frac{\theta_t}{\sqrt{H}} \tag{45}$$

Entonces, si $w_t \leq \frac{\theta_t}{\sqrt{H}}$, el hogar ofrecerá cero horas de trabajo o solo consumirá ocio.

(c) Ahora suponga que el producto Y_t, lo produce una empresa competitiva con la tecnología:

$$Y_t = A_t K_t^{1/2} N_t^{1/2} \tag{46}$$

Con $K_t > 0$ el stock de capital físico (exógeno), N_t la cantidad de horas de trabajo empleadas, y A_t la productividad total de los factores. Obtenga una expresión de la demanda laboral como función de w_t, K_t, y A_t.

El problema de la empresa es

$$\max_{N_t} \quad A_t K_t^{1/2} N_t^{1/2} - w_t N_t \tag{47}$$

Así, la condición de optimalidad está dada por:

$$\frac{1}{2} A_t K_t^{1/2} N_t^{-1/2} = w_t \tag{48}$$

$$\frac{1}{2}\frac{A_t K_t^{1/2}}{w_t} = N_t^{1/2} \tag{49}$$

$$N_t = \frac{1}{4}\frac{A_t^2 K_t}{w_t^2} \tag{50}$$

(d) Utilizando sus respuestas de los incisos (a) y (c), obtenga una expresión para el salario de equilibrio en el mercado laboral. (Para simplificar, suponga que las utilidades de las empresas no se transfieren al hogar, por lo que la curva de oferta laboral es la misma que en el inciso (a)).

En equilibrio, la oferta y la demanda laboral se igualan:

$$N_t = H - \left(\frac{\theta_t}{w_t}\right)^2 \tag{51}$$

$$N_t = \frac{1}{4}\frac{A_t^2 K_t}{w_t^2} \tag{52}$$

Es decir:

$$H - \frac{\theta_t^2}{w_t^2} = \frac{1}{4}\frac{A_t^2 K_t}{w_t^2} \tag{53}$$

$$H w_t^2 - \theta_t^2 = \frac{1}{4} A_t^2 K_t \tag{54}$$

$$H w_t^2 = \frac{1}{4} A_t^2 K_t + \theta_t^2 \tag{55}$$

$$w_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_t^2 K_t + \theta_t^2}{H}} \tag{56}$$

(e) ¿Cómo cambia el salario de equilibrio cuando aumenta A_t? Explique intuitivamente su respuesta.

El salario de equilibrio es:

$$w_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_t^2 K_t + \theta_t^2}{H}} \tag{57}$$

Un aumento en A_t implica un aumento en w_t. Esto porque la demanda laboral aumenta y el salario tiene que subir para corregir el exceso de demanda.

(f) ¿Cómo cambia el salario de equilibrio cuando aumenta θ? Explique intuitivamente su respuesta.

El salario de equilibrio es:

$$w_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_t^2 K_t + \theta_t^2}{H}} \tag{58}$$

Un aumento en θ_t implica un aumento en w_t. Esto porque la oferta laboral se contrae porque el ocio es más atractivo, generando un exceso de demanda laboral. Para corregirlo, el salario aumenta y así aclarar el mercado.