EC3201 Teoría Macroeconómica 2
I Examen

Prof. Jonathan Garita

II-2025

1. **Hogares Hand-to-Mouth.** Considere un hogar representativo en una economía de dotación de dos períodos con preferencias

$$U = \log(C_t) + \beta \log(C_{t+1}) \tag{1}$$

El hogar recibe dotaciones exógenas $\{Y_t, Y_{t+1}\}$, enfrenta una tasa de interés bruta $1 + r_t$ entre t y $t + 1$, y parte sin riqueza inicial. Defina S_t como el ahorro al final de t.

   (a) Obtenga la función de consumo óptimo en t y la regla de ahorro S_t en función de $(\beta, r_t, Y_t, Y_{t+1})$.

$$\max_{C_t, C_{t+1}} \log(C_t) + \beta \log(C_{t+1})$$

$$s.a.$$

$$C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r_t} = Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}$$

Las condiciones de optimalidad son

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta(1+r_t)$$

$$C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r_t} = Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}$$

Combinando, la función de consumo es:

$$C_t = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right)$$

Como el hogar inicia sin riqueza ($S_{t-1} = 0$), entonces, de la restricción presupuestaria del periodo t, se tiene que $S_t = Y_t - C_t$. Así:

$$S_t = Y_t - C_t$$
$$S_t = Y_t - \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right)$$
$$S_t = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(\beta Y_t - \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right)$$

(b) Usando su resultado anterior, caracterice cuándo el hogar querría endeudarse ($S_t < 0$) y, por tanto, sería más proclive a enfrentar una *restricción de endeudamiento* que impone $S_t \geq 0$. Discuta intuitivamente el papel de las preferencias, el precio intertemporal y la asimetría del flujo de dotación —esto es, cómo influyen β, r_t y la razón $\frac{Y_{t+1}}{Y_t}$— en la probabilidad de que la restricción sea vinculante.

$$S_t = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(\beta Y_t - \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right) < 0$$
$$\iff \beta Y_t < \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}$$

Entonces, es más probable que el hogar sea deudor si el ingreso futuro es lo suficientemente alto relativo al presente (quiere transferir riqueza de mañana a hoy para suavizar el consumo), si el costo de endeudarse o el premio de ahorrar (r_t) es bajo , o si el hogar es muy impaciente (β bajo).

(c) Suponga ahora que la restricción de endeudamiento $S_t \geq 0$ es *vinculante*. Derive el consumo en el período t bajo esta restricción y argumente, usando la concavidad de la utilidad (o un argumento de suavizamiento), por qué el bienestar de estos hogares es menor que en el caso sin restricción.

Si el hogar no puede endeudarse, entonces su mejor opción es consumir su dotación en cada periodo en su totalidad. Es decir:

$$C_t = Y_t \quad y \quad C_{t+1} = Y_{t+1}$$

Esto es porque ahorrar no es óptimo porque no maximiza su utilidad. Entonces, su segunda mejor opción es consumir en autarquía.

(d) Considere una economía con una fracción γ de hogares *no restringidos* (superíndice NH) cuyo consumo presente C_t^{NH} coincide con el de la parte (a), y una fracción $1 - \gamma$ de hogares *restringidos* (superíndice $H2M$) con

$$C_t^{H2M} = Y_t^{H2M} \tag{2}$$

El consumo agregado es entonces

$$C_t = \gamma C_t^{NH} + (1-\gamma) C_t^{H2M} \tag{3}$$

Ahora suponga que cada hogar recibe una unidad adicional de ingreso en t. Muestre que el ingreso agregado aumenta en una unidad también ($\Delta Y_t = \gamma \Delta Y_t^{NH} + (1-\gamma)\Delta Y_t^{H2m} = 1$). Luego, calcule el impacto en el consumo agregado (ΔC_t) y explique por qué los parámetros β y γ son clave para la magnitud de (ΔC_t), usando la intuición económica del modelo.

De las respuestas anteriores y el inciso, se tiene que:

$$\begin{aligned} C_t^{NH} &= \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(Y_t^{NH} + \frac{Y_{t+1}^{NH}}{1+r_t}\right) \\ C_t^{H2M} &= Y_t^{H2M} \end{aligned}$$

Entonces, el consumo agregado es

$$C_t = \gamma \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(Y_t^{NH} + \frac{Y_{t+1}^{NH}}{1+r_t}\right) + (1-\gamma) Y_t^{H2M}$$

Asi, el aumento en el consumo agregado si el ingreso presente de ambos tipos de hogares aumenta una unidad es:

$$\begin{aligned} \Delta C_t &= \gamma \left(\frac{1}{1+\beta}\right) \Delta Y_t^{NH} + (1-\gamma)\Delta Y_t^{H2M} \\ &= \gamma \left(\frac{1}{1+\beta}\right) + (1-\gamma) \end{aligned}$$

Además, el cambio en el ingreso agregado en t es:

$$\Delta Y_t = \gamma \Delta Y_t^{NH} + (1-\gamma)\Delta Y_t^{H2M} = 1$$

Entonces, como $\beta \in (0,1)$, $\Delta C_t < \Delta Y_t = 1$. Es decir, el consumo agregado va a responder menos que el ingreso agregado. Esto porque los hogares tipo NH tienen una propensión marginal a consumir menor a uno $\left(\frac{1}{1+\beta}\right)$, por lo que son hogares que van a consumir una proporción menor a uno de su mayor ingreso extra. La PMC de los hogares H2M en este caso es uno. Por tanto, los hogares NH tienen PMC relativamente más baja, determinada por su impaciencia.

La respuesta en el consumo agregado al choque de ingreso va a depender, por tanto, de β. Entre más pacientes sean los hogares tipo NH, menor será su PMC y, por tanto, responderán menos al choque de ingreso, afectando la respuesta agregada. Además, el parámetro γ es clave porque determina cuántos hogares NH hay en la economía, que son los hogares que tienen una PMC relativamente más baja. Entre mayor sea γ, mayor es la importancia relativa de hogares NH y, por tanto, menor la respuesta del consumo agregado.

2. Considere una economía competitiva de dos períodos con un hogar representativo que posee el capital y las acciones de la empresa. Las preferencias del hogar son

$$U = \log(C_t) + \beta \log(C_{t+1}) \tag{4}$$

La tecnología es lineal en capital,

$$Y_{t+j} = A_{t+j} K_{t+j} \quad \forall j = 0, 1 \tag{5}$$

y el capital se deprecia completamente,

$$K_{t+1+j} = I_{t+j} + (1-\delta)K_{t+j}, \qquad \delta = 1, \ \forall j \in \{0, 1\}. \tag{6}$$

Los mercados son competitivos; la empresa se financia y remunera el capital a la tasa r_t, que es la misma que enfrenta el hogar.

(a) Plantee el problema del hogar.

$$\max_{C_t, C_{t+1}} \log(C_t) + \beta \log(C_{t+1})$$
$$C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r_t} = D_t + \frac{D_{t+1} + D^I_{t+1}}{1+r_t}$$

(b) Plantee el problema de la empresa.

Como $\delta = 1$, de la ley de movimiento del capital:

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t \qquad \Rightarrow K_{t+1} = I_t$$
$$K_{t+2} = I_{t+1} + (1-\delta)K_{t+1} \qquad \Rightarrow K_{t+2} = I_{t+1} = 0$$

Entonces, el problema de la empresa se reduce a:

$$\begin{aligned} \max_{K_{t+1}} D_t + \frac{D_{t+1}}{1+r_t} \\ D_t = A_t K_t \\ D_{t+1} = A_{t+1}K_{t+1} - (1+r_t)K_{t+1} \end{aligned}$$

Simplificando

$$\max_{K_{t+1}} A_t K_t + \frac{A_{t+1}K_{t+1} - (1+r_t)K_{t+1}}{1+r_t}$$

La condición de primer orden implica que:

$$A_{t+1} = (1+r_t)$$

(c) Obtenga las ecuaciones de equilibrio general para $C_t, C_{t+1}, I_t, r_t, Y_t$ y Y_{t+1}.

El problema del hogar implica las condiciones de optimalidad:

$$\begin{aligned} \frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta(1+r_t) \\ C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r_t} = D_t + \frac{D_{t+1}+D^I_{t+1}}{1+r_t} \end{aligned}$$

Combinando, la función de consumo en cada periodo son:

$$\begin{aligned} C_t = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(D_t + \frac{D_{t+1}+D^I_{t+1}}{1+r_t}\right) \\ C_{t+1} = \beta(1+r_t)\left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(D_t + \frac{D_{t+1}+D^I_{t+1}}{1+r_t}\right) \end{aligned}$$

Las condición de optimalidad para la empresa para K_{t+1} es:

$$A_{t+1} = (1+r_t)$$

Ahora, **en equilibrio general**, sabemos que r_t vacía el mercado de fondos prestables. Esto implica que:

$$D^I_{t+1} \equiv r_t S_t - r_t I_t = 0$$

Además, en equilibrio general $A_{t+1} = (1 + r_t)$, por lo que los dividendos que genera la empresa son:

$$\begin{aligned} D_t &= A_t K_t \\ D_{t+1} = A_{t+1}K_{t+1} - (1 + r_t)K_{t+1} &= A_{t+1}K_{t+1} - A_{t+1}K_{t+1} = 0 \end{aligned}$$

Así, de la función de consumo del hogar, se tiene que:

$$C_t = \left(\frac{1}{1+\beta}\right) A_t K_t$$

De igual forma, para el periodo $t + 1$, la función de consumo es:

$$\begin{aligned} C_{t+1} &= \beta(1 + r_t)\left(\frac{1}{1+\beta}\right) A_t K_t \\ \Rightarrow C_{t+1} &= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) A_{t+1} A_t K_t \end{aligned}$$

Como A_t y K_t están dados, el producto Y_t está determinado en equilibrio general por:

$$Y_t = A_t K_t$$

En equilibrio general, el mercado de fondos prestables se aclara. Como $I_{t+1} = 0$ y sabemos la expresión de C_{t+1} en equilibrio general, entonces tenemos que para K_{t+1}:

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= C_{t+1} \\ \Rightarrow A_{t+1}K_{t+1} &= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) A_{t+1} A_t K_t \\ \Rightarrow K_{t+1} &= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) A_t K_t \end{aligned}$$

Finalmente, la producción en $t + 1$ en equilibrio general es:

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= A_{t+1}K_{t+1} \\ \Rightarrow Y_{t+1} &= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) A_{t+1} A_t K_t \end{aligned}$$

Por tanto, para las variables endógenas $C_t, C_{t+1}, I_t, Y_t, Y_{t+1}, r_t$, se tiene que el equilibrio general es:

$$
\begin{aligned}
C_t &= \left(\frac{1}{1+\beta}\right) A_t K_t \\
C_{t+1} &= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) A_{t+1} A_t K_t \\
I_t = K_{t+1} &= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) A_t K_t \\
Y_t &= A_t K_t \\
Y_{t+1} &= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) A_{t+1} A_t K_t \\
A_{t+1} &= (1+r_t)
\end{aligned}
$$

(d) **Choque transitorio en t.** Analice, usando el sistema de equilibrio, el efecto de un aumento transitorio de A_t (manteniendo A_{t+1} fijo) sobre el equilibrio general de $C_t, C_{t+1}, I_t, r_t, Y_t$ y Y_{t+1}. Explique el ajuste de cada variable con la intuición del modelo.

Del sistema de equilibrio general, es claro que un aumento en A_t implica un aumento en $C_t, C_{t+1}, I_t Y_t$, pero no afecta r_t. Esto porque un choque de productividad afecta el producto, lo cual afecta los dividendos (y por ende el ingreso del hogar) que impulsa el consumo. Pero también impulsa el ahorro y, por tanto la inversión. La tasa de interés real no tiene que moverse para vaciar el mercado de fondos prestables porque el mayor ahorro lo absorbe la inversión sin generar excesos.

(e) **Choque anticipado.** Analice, usando el sistema de equilibrio, el efecto de un aumento de A_{t+1} (manteniendo A_t fijo) sobre el equilibrio general de $C_t, C_{t+1}, I_t, r_t, Y_t$ y Y_{t+1}. Explique el ajuste de cada variable con la intuición del modelo.

Del sistema de equilibrio general, es claro que un aumento en A_{t+1} implica un aumento en C_{t+1}, r_t y Y_{t+1} pero no afecta $C_t, I_t Y_t$. Es decir, con excepción de las tasas de interés, las variables endógenas en t no cambian con el choque en equilibrio general. Primero, un choque de productividad futura genera un efecto sustitución pues los agentes en esta economía están motivados a consumir menos y ahorrar más para construir capital que va a ser más productivo mañana. Pero, el aumento en productividad también induce a los agentes en esta economía a consumir menos y crear menos capital porque el capital va a ser más productivo mañana, por lo que se necesita menos insumos para producir lo mismo. En este caso, parece que ambos efectos se cancelan. Los hogares no consumen distinto y, como Y_t no cambia, entonces no van a ahorrar más. Como el capital va a ser más productivo mañana, las empresas les gustaría invertir más, pero el aumento en r_t corrige el exceso. Por tanto, la inversión no cambia. El consumo de mañana si aumenta porque hay más producción y los hogares van a tener más ingreso. La producción va a ser mayor a pesar de que no se creó más capital por el aumento en productividad.

(f) **Choque de impaciencia.** Analice, usando el sistema de equilibrio, el efecto cuando los hogares se vuelven más impacientes (cambio en β) sobre $C_t, C_{t+1}, I_t, r_t, Y_t$ y Y_{t+1}. Explique el ajuste de cada variable con la intuición del modelo.

Un aumento en impaciencia se traduce en una disminución en β. Note que $\frac{1}{1+\beta}$ es decreciente en β mientras que $\frac{\beta}{1+\beta}$ es creciente en β. Por tanto, C_t va a aumentar con una caída en β, mientras que C_{t+1}, I_t, Y_{t+1} van a disminuir. Por su parte, Y_t y r_t no cambian con el choque. Esto se debe a que mayor impaciencia induce a los hogares a querer ahorrar menos. Por tanto, induce a mayor consumo hoy y menor consumo mañana. El menor ahorro implicaría menor oferta de fondos prestables que, en este caso, se traduce en menor inversión sin cambiar la tasa real. Menor inversión implica menos capital mañana y, por tanto, menos producción.