EC3201 Teoría Macroeconómica 2
Práctica I Examen

Prof. Jonathan Garita

I-2025

1. **Heterogeneidad, Transferencias y Equilibrio:** Suponga una economía de dotaciones compuesta por dos tipos de agentes —denominados (1) y (2)—. Cada tipo de agente tiene utilidad logarítmica, el mismo factor de descuento y enfrenta la misma tasa de interés. Sin embargo, pueden enfrentar patrones de dotación distintos. En consecuencia, la función de consumo para cada tipo de agente $j = (1)$ o (2) está dada por:

$$C_t(j) = \frac{1}{1+\beta}\left[Y_t(j) + \frac{Y_{t+1}(j)}{1+r_t}\right] \tag{1}$$

Los agentes del tipo 1 tienen un patrón de dotación $(Y_t(1), Y_{t+1}(1)) = (0, 1)$. Los agentes del tipo 2 tienen un patrón de dotación $(Y_t(2), Y_{t+1}(2)) = (1, 0)$. Suponga que existen 100 agentes de cada tipo.

(a) El equilibrio de mercado requiere que el ahorro agregado sea igual a 0, o equivalentemente, que:

$$C_t = 100 \times C_t(1) + 100 \times C_t(2) = Y_t = 100 \times Y_t(1) + 100 \times Y_t(2)$$

Encuentre una expresión para la tasa de interés de equilibrio r_t utilizando los patrones de dotación dados.

(b) Con base en esta respuesta, obtenga expresiones para el ahorro de equilibrio de cada tipo de agente, es decir, $S_t(1)$ y $S_t(2)$. En equilibrio, ¿cuál de los agentes está pidiendo prestado y cuál está ahorrando? ¿Qué se puede afirmar sobre el ahorro agregado?

(c) Argumente que la tasa de interés de equilibrio r_t que obtuvo en el inciso (a) es la misma que se obtendría si existiera un único tipo de agente con las mismas preferencias y con un patrón de dotación $(Y_t, Y_{t+1}) = (100, 100)$.

(d) Suponga que un planificador social benevolente implementa un esquema de impuestos y transferencias para igualar las dotaciones en el primer periodo entre los agentes. Es decir, el planificador social impone un impuesto de 1/2 a los agentes del tipo 2 y transfiere ese mismo monto a los agentes del tipo 1 (dado que hay el mismo número de agentes, esto es neutral desde el punto de vista presupuestario del planificador). Repita el inciso (a) bajo esta nueva suposición. ¿Cómo afecta este sistema de impuestos y transferencias a la tasa de interés de equilibrio? Repita el inciso (b). ¿Cómo influye este sistema en el comportamiento de ahorro o endeudamiento de cada tipo de agente?

2. **La Curva de Rendimiento:** Supongamos que tiene una economía con un solo tipo de agente, pero que el tiempo dura tres períodos en lugar de dos. La utilidad vitalicia para el hogar es:

$$U = \ln C_t + \beta \ln C_{t+1} + \beta^2 \ln C_{t+2}$$

La restricción presupuestaria intertemporal es:

$$C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r_t} + \frac{C_{t+2}}{(1+r_t)(1+r_{t+1})} = Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t} + \frac{Y_{t+2}}{(1+r_t)(1+r_{t+1})}$$

r_t es la tasa de interés sobre ahorro / préstamo entre t y $t+1$, mientras que r_{t+1} es la tasa de interés sobre ahorro / préstamo entre $t+1 y t+2$.

(a) Resuelva para C_{t+2} en la restricción intertemporal y sustituya esto en la utilidad vitalicia. Esto transforma el problema en uno de elección de C_t y C_{t+1}. Use cálculo para derivar dos ecuaciones de Euler: una relacionando C_t con C_{t+1}, y la otra relacionando C_{t+1} con C_{t+2}.

(b) En equilibrio, debemos tener $C_t = Y_t, C_{t+1} = Y_{t+1}$ y $C_{t+2} = Y_{t+2}$. Derive expresiones para r_t y r_{t+1} en términos de la trayectoria exógena de la dotación $y \beta$.

(c) Se podría definir la tasa de interés "larga" como el producto de las tasas de interés de un período. En particular, defina $(1+r_{2,t})^2 = (1+r_t)(1+r_{t+1})$ (el término al cuadrado en $1+r_{2,t}$ refleja el hecho de que si ahorra por dos períodos, obtiene cierta capitalización). Si hubiera un instrumento de ahorro con una madurez de dos períodos, esta condición tendría que ser satisfecha (intuitivamente, porque un hogar sería indiferente entre ahorrar dos veces en bonos de un período o una vez en un bono de dos períodos). Derive una expresión para $r_{2,t}$.

(d) La curva de rendimiento representa las tasas de interés en función del vencimiento del tiempo. En este problema simple, se trazaría r_t en función de 1 (hay un vencimiento de un período [1]) y $r_{2,t}$ en función de 2 (hay un vencimiento de dos períodos). Si $Y_t = Y_{t+1} = Y_{t+2}$, ¿cuál es el signo de la pendiente de la curva de rendimiento (es decir, si $r_{2,t} > r_{1,t}$, entonces la curva de rendimiento es ascendente)?

(e) A menudo se afirma que una ”curva de rendimiento invertida” es un predictor de una recesión. Si Y_{t+2} es lo suficientemente baja en relación con Y_t y Y_{t+1}, ¿podría la curva de rendimiento en este modelo simple estar ”invertida” (es decir, tener signo opuesto) a lo que se encontró en la parte anterior? Explique.

3. Suponga que se tiene una economía poblada por un hogar representativo y una empresa representativa. No hay gobierno. No existe dinero. Todo es real. No hay incertidumbre. El hogar resuelve el siguiente problema:

$$\max_{C_t,N_t,S_t} \quad U = \ln C_t + \theta_t \ln(1 - N_t) + \beta \left[\ln C_{t+1} + \theta_{t+1} \ln(1 - N_{t+1})\right]$$

sujeto a:

$$C_t + S_t = w_t N_t + D_t$$
$$C_{t+1} = w_{t+1} N_{t+1} + D_{t+1} + (1 + r_t) S_t$$

D_t y D_{t+1} son los dividendos recibidos por la propiedad de la empresa; estos son tomados como dados por el hogar.

La empresa representativa produce output de acuerdo con la siguiente función de producción:

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

Sus dividendos en cada periodo son:

$$D_t = Y_t - w_t N_t$$
$$D_{t+1} = Y_{t+1} - w_{t+1} N_{t+1} + (1 - \delta) K_{t+1} - (1 + r_t) I_t$$

La empresa debe financiar toda la inversión del periodo t mediante endeudamiento. Suponemos que $f_t = 0$ (por lo que la tasa que el gobierno paga por endeudarse es la misma que la tasa que el hogar recibe por ahorrar). La inversión se transforma en nuevo capital mediante:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta) K_t$$

La empresa elige N_t e I_t para maximizar el valor presente descontado de los dividendos, sujeto a la ley de evolución del capital físico:

$$\max_{N_t,I_t} \quad V_t = A_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - w_t N_t + \frac{1}{1 + r_t} \left[A_{t+1} K_{t+1}^{\alpha} N_{t+1}^{1-\alpha} - w_{t+1} N_{t+1} + (1 - \delta) K_{t+1} - (1 + r_t) I_t\right]$$

(a) Obtenga las condiciones de optimalidad del hogar como un sistema que tenga solución única.

(b) Obtenga las condiciones de optimalidad de la empresa que caracterizan la demanda laboral y la inversión.

4. **(Función de consumo con utilidad no derivable)** Asuma que la función de utilidad vitalicia de un hogar representativo de dos periodos está dada por:

$$U = \min \{\alpha c_t, c_{t+1}\}, \quad \alpha > 0$$

Los hogares pueden ahorrar o endeudarse a una tasa de interés $r > 0$.

(a) Resuelva el problema de optimización del hogar. Encuentre una expresión para los niveles de consumo y ahorro óptimo como función de c_t y c_{t+1} como función de r, y_t y y_{t+1}.

(b) Calcule $\frac{\partial S_t}{\partial r}$, es decir, si el ahorro de un hogar es creciente o decreciente en la tasa de interés. En particular, muestre que el signo de esta derivada depende del valor del parámetro α y provea una intuición económica para sus respuestas.

(c) ¿Cuál es la propensión marginal de consmo en este modelo? ¿Es mayor o menor que uno? ¿Cómo depende de la tasa de interés? Acompañe con intuición económica sus respuestas.

(d) Considere un cambio del ingreso en t de $dY_t = 1$ y que $dY_{t+1} = \rho dY_t$, con $0 < \rho < 1$ un parámetro que mide la persistencia del choque de ingreso en el tiempo. Estime el efecto de dicho choque de ingreso sobre el consumo en el periodo t. ¿Cómo afecta ρ la respuesta de C_t al choque de ingreso? Provea intuición económica.

5. **(Oferta de Trabajo):** Considere un modelo de un periodo del hogar (modelo estático). El hogar obtiene utilidad del consumo, C_t, y del ocio, $L_t = 1 - N_t$, donde N_t es la cantidad de trabajo ofrecido. El hogar obtiene ingresos laborales $w_t N_t$, tomando como dado el salario w_t. El problema del hogar es:

$$\max_{C_t, N_t} \quad u(C_t, 1 - N_t)$$

$$\text{sujeto a:}$$

$$C_t = w_t N_t$$

(a) Para una función de utilidad general $u(\cdot)$, derive la condición de primer orden de este problema. Proporcione una interpretación intuitiva de por qué esta condición debe cumplirse si el hogar está actuando de manera óptima.

(b) Suponga ahora que la función de utilidad es

$$u(C_t, 1 - N_t) = \ln \left[C_t + \theta_t \ln(1 - N_t)\right],$$

donde θ_t es un parámetro exógeno de preferencias. Utilice la condición de primer orden obtenida en el inciso (a), junto con esta función de utilidad, para obtener una función de oferta laboral para el hogar.

(c) En su lugar, suponga que la función de utilidad es

$$u(C_t, 1 - N_t) = \ln C_t + \theta_t \ln(1 - N_t).$$

Utilice nuevamente la condición de primer orden genérica del inciso (a) para obtener la función de oferta laboral correspondiente.

(d) ¿Puede usted ofrecer alguna intuición económica sobre las diferencias entre las funciones de oferta laboral obtenidas en los incisos (b) y (c)? Explique.

6. **(Modelo de equilibrio general)** Considere una economía de dos periodos con las siguientes tecnologías de producción ($j = 0, 1$):

$$Y_{t+j} = A_{t+j} K_{t+j} \quad (2)$$

$$K_{t+j} = I_t + (1 - \delta) K_t \quad (3)$$

$$\delta = 1 \quad (4)$$

$$K_t > 0 \quad \textit{dado} \quad (5)$$

Las preferencias de los hogares están dadas por:

$$U = \frac{C_t^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma}} + \beta \frac{C_{t+1}^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma}} \quad \beta \in (0, 1) \quad (6)$$

En esta economía, no hay dinero, gobierno y todo está expresado en unidades reales. El hogar es dueño de la empresa y del intermediario financiero.

(a) Plantee el problema del hogar y obtenga una función de consumo para cada periodo.

(b) Plantee el problema de la empresa y obtenga la condición de optimalidad para K_{t+1}.

(c) Utilice la definición de equilibrio general para obtener el equilibrio para C_t, C_{t+1}, Y_t, Y_{t+1}, K_{t+1}, I_t y r_t. Escriba claramente el bloque de las seis expresiones para la solución de las variables endógenas.

(d) Considere un choque de productividad A_t. ¿Qué pasa con C_t, C_{t+1}, Y_t, Y_{t+1}, K_{t+1}, I_t y r_t?

(e) Explique intuitivamente por qué un choque de productividad presente, A_t, tiene un impacto en las variables futuras en equilibrio general.

(f) Ahora, considere un choque de productividad A_{t+1}. ¿Qué pasa con C_t, C_{t+1}, Y_t, Y_{t+1}, K_{t+1}, I_t y r_t?

(g) Explique intuitivamente por qué un choque de productividad futura, A_{t+1}, tiene un impacto en las variables del periodo t en equilibrio general.