Teoría Macroeconómica 2

Primer Parcial

Instrucciones generales: El examen es estrictamente individual, de lo contrario se aplicarán todas las normas disciplinarias especificadas en el Reglamento Académico Estudiantil. Muestre el razonamiento necesario para respaldar sus respuestas. No puede utilizar ningún dispositivo electrónico. La prueba tiene una duración de 3 horas.

1. **(Política monetaria y consumo)** Asuma que la función de utilidad vitalicia de un hogar representativo de dos periodos está dada por:

$$\max_{C_t, C_{t+1}} \ln C_t + \beta \ln C_{t+1}$$

Los hogares en este modelo inician con un stock de ahorro heredado del periodo $t-1$ igual a $S_{t-1} < 0$, el cual está predeterminado. El pago de intereses vinculado a S_{t-1} lo determina una tasa de interés real r_{t-1} y las decisiones de ahorro del periodo t están vinculadas a una tasa de interés real de r_t. El hogar toma ambas tasas como dadas.

a) Plantee el problema de optimización del hogar. Encuentre una expresión para los niveles de consumo (C_t, C_{t+1}) y ahorro óptimo (S_t) como función de como función de $S_{t-1}, r_{t-1}, r_t, Y_t$ y Y_{t+1}.

$$\max_{C_t, C_{t+1}} \ln C_t + \beta \ln C_{t+1}$$

s.a.

$$C_t + S_t = Y_t + (1 + r_{t-1})S_{t-1}$$
$$C_{t+1} = Y_{t+1} + (1 + r_t)S_t$$

La RPI está dada por:

$$C_t + \frac{C_{t+1}}{1 + r_t} = Y_t + (1 + r_{t-1})S_{t-1} + \frac{Y_{t+1}}{1 + r_t}$$

La ecuación de Euler está dada por:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta(1+r_t)$$

Lo que implica que

$$C_{t+1} = \beta C_t(1+r_t)$$

Sustituyendo en la RPI:

$$C_t + \frac{\beta C_t(1+r_t)}{1+r_t} = Y_t + (1+r_{t-1})S_{t-1} + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}$$

$$C_t = \frac{1}{1+\beta}\left[Y_t + (1+r_{t-1})S_{t-1} + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right]$$

De la ecuación de Euler:

$$C_{t+1} = \beta C_t(1+r_t)$$

$$C_{t+1} = \frac{\beta(1+r_t)}{1+\beta}\left[Y_t + (1+r_{t-1})S_{t-1} + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right]$$

Finalmente, el ahorro está dado por:

$$\begin{aligned} S_t &= Y_t + (1+r_{t-1})S_{t-1} - C_t \\ &= Y_t + (1+r_{t-1})S_{t-1} - \frac{1}{1+\beta}\left[Y_t + (1+r_{t-1})S_{t-1} + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right] \\ &= \frac{\beta}{1+\beta}\left(Y_t + (1+r_{t-1})S_{t-1}\right) - \frac{1}{1+\beta}\frac{Y_{t+1}}{1+r_t} \end{aligned}$$

Note que el problema es idéntico a un problema sin riqueza inicial ($S_{t-1} = 0$), solamente definiendo $\tilde{Y}_t = Y_t + (1+r_{t-1})S_{t-1}$.

b) Suponga que $r_{t-1} = r_t = r$. Determine $\frac{\partial S_t}{\partial r}$, es decir, si el ahorro de un hogar es creciente o decreciente en la tasa de interés. Provea una intuición económica para sus respuestas.

$$S_t = \frac{\beta}{1+\beta}\left(Y_t + (1+r)S_{t-1}\right) - \frac{1}{1+\beta}\frac{Y_{t+1}}{1+r}$$

Entonces,

$$\frac{\partial S_t}{\partial r} = \frac{\beta}{1+\beta}S_{t-1} + \frac{1}{1+\beta}\frac{Y_{t+1}}{(1+r)^2}$$

Como $S_{t-1} < 0$, entonces el efecto en el ahorro es ambiguo. Esto pues el aumento en la tasa de interés motiva a aumentar el ahorro $\left(\frac{1}{1+\beta}\frac{Y_{t+1}}{(1+r)^2} > 0\right)$ pero al mismo tiempo, implica un mayor pago de intereses sobre la deuda heredada que reduce el ingreso disponible para el ahorro $\left(\frac{\beta}{1+\beta}S_{t-1}\right)$. Si el hogar fuera ahorrante, entonces el efecto de un cambio en la tasa de interés sería positivo sobre el ahorro, sin ambiguedad.

c) Suponga que $r_{t-1} = r_t = r$. Suponga que la autoridad monetaria de esta economía decide incrementar su tasa de política monetaria para combatir presiones inflacionarias. Determine el efecto de este choque de tasa de interés sobre el consumo presente. En particular, identifique los dos mecanismos mediante los cuales el aumento en la tasa de interés afecta el consumo presente y el signo asociado a cada mecanismo. (Pista: No es el efecto ingreso vs. sustitución. Piense en el escenario de un hogar que inicie con $S_{t-1} = 0$ relativo a este caso).

$$C_t = \frac{1}{1+\beta}\left[Y_t + (1+r)S_{t-1} + \frac{Y_{t+1}}{1+r}\right]$$

Entonces

$$\frac{\partial C_t}{\partial r} = \frac{1}{1+\beta}S_{t-1} - \frac{1}{1+\beta}\frac{Y_{t+1}}{(1+r)^2}$$

Que es negativo dado que $S_{t-1} < 0$. En este caso, el efecto sobre el consumo es más pronunciado que el caso de un hogar que empieza sin riqueza. Esto porque hay dos efectos: una mayor tasa de interés encarece el consumo presente $-\frac{1}{1+\beta}\frac{Y_{t+1}}{(1+r)^2} < 0$ pero además incrementa el pago de intereses sobre el stock de deuda pasado. Es decir, el hogar tiene que pagar más intereses por sus obligaciones, lo que reduce su capacidad de consumo.

2. **(La curva de Laffer)** Suponga que la producción en la economía se produce solo con trabajo. Supongamos que la función de producción es $Y = AN$, donde Y denota el producto total en la economía, A denota la productividad y N denota el trabajo total en la economía. Suponga que las empresas toman los salarios w como dados.

a) Obtenga la función de demanda laboral en esta economía.
La demanda laboral de una empresa está dada por:

$$A = w$$

Es decir, la oferta laboral es completamente inelástica con respecto a w. Es una curva plana:

b) Suponga que la función de utilidad de un hogar individual está dada por:

$$\log C - \theta \frac{n^{1+1/\eta}}{1+1/\eta}$$

donde C denota el consumo per cápita, n denota las horas per cápita, y η y θ son parámetros. Supongamos que todos los hogares son idénticos. Esto implica que todos consumirán la misma cantidad en equilibrio y ofrecerán el mismo número de horas de trabajo. La restricción presupuestaria de cada hogar es

$$C = (1-\tau_l)\, wn + T$$

donde $\tau_l \in [0,1]$ denota el impuesto laboral en esta economía y T denota una transferencia de suma fija del gobierno al hogar. Para simplificar, suponemos que el gobierno redistribuye todos los ingresos fiscales de vuelta a los hogares mediante una transferencia de suma fija. Obtenga la condición de optimalidad que define la oferta laboral del hogar.

Como $C = (1-\tau_l)\, wn + T$, sustituyendo en la función de utilidad:

$$\log\left((1-\tau_l)\, wn + T\right) - \theta \frac{n^{1+1/\eta}}{1+1/\eta}$$

La condición de primer orden con respecto a N está dada por:

$$\frac{(1-\tau_l)\, w}{(1-\tau_l)\, wN + T} = \theta n^{1/\eta}$$

simplificando:

$$(1-\tau_l)\, w = \theta n^{1/\eta}\left((1-\tau_l)\, wn + T\right)$$

Nota: Intuitivamente, el gobierno está cobrando un impuesto, pero no hay gasto público en este modelo. Entonces, por eso regresa los ingresos tributarios al hogar en su totalidad. Esto es para que se aclare el mercado de bienes. De lo contrario, el gobierno estaría recolectando recursos para nada.

c) Suponga que hay M hogares idénticos en la economía. Los ingresos tributarios totales son entonces $IT_t \equiv \tau_l wnM$, es decir, la tasa impositiva multiplicada por el ingreso laboral de cada hogar (wn) multiplicado por el número de hogares. Supongamos que cada hogar recibe una proporción equitativa de estos ingresos laborales como una transferencia de suma fija del gobierno. Utilice este hecho, la restricción presupuestaria del hogar, la curva de oferta de trabajo y la ecuación de demanda de trabajo para mostrar que las horas trabajadas por persona en esta economía se pueden expresar como

$$n = \theta^{-\frac{\eta}{\eta+1}} (1 - \tau_l)^{\frac{\eta}{\eta+1}}$$

d) La curva de Laffer representa los ingresos fiscales como una función de la tasa impositiva y solo de las variables y parámetros exógenos. Use la expresión que obtuvo en la parte (c), así como la curva de demanda laboral, para obtener una expresión de los ingresos tributarios IT_t como función solo de la tasa impositiva τ_l, las variables exógenas (A, M) y los parámetros (η, θ). Trace esta función asumiendo que $A = 1$ y $M = 1$.

$$T_t = \frac{\tau_l w n M}{M} = \tau_l w n$$

Es decir, el gobierno reparte todos los ingresos tirbutarios equitativamente a los hogares. Así, introduciendo en la función de oferta laboral derivada en b:

$$\begin{aligned}
(1 - \tau_l) w &= \theta n^{1/\eta} ((1 - \tau_l) wn + \tau_l wn) \\
\Leftrightarrow (1 - \tau_l) w &= \theta n^{1+1/\eta} w \\
\Leftrightarrow n^{1+1/\eta} &= \theta^{-1} (1 - \tau_l) \\
\Leftrightarrow n^{\frac{\eta+1}{\eta}} &= \theta^{-1} (1 - \tau_l) \\
\Leftrightarrow n &= \theta^{-\frac{\eta}{\eta+1}} (1 - \tau_l)^{\frac{\eta}{\eta+1}}
\end{aligned}$$

Si $\tau_l = 0$, entonces $n = \theta^{-\frac{\eta+1}{\eta}}$. Si $\tau_l = 1$, entonces $n = 0$. Es decir, la curva en un espacio (τ_l, n) está dada por:

e) Obtenga una expresión de la tasa impositiva que produce el máximo de ingresos fiscales como una función de los parámetros exógenos (η, θ). ¿Cómo depende la tasa impositiva óptima de la elasticidad Frisch?

Tomando la derivada de los ingresos tributarios con respecto a τ_l:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\tau_l w n P\right)}{\partial \tau_l} = \theta^{-\frac{\eta+1}{\eta}} \left[\left(1-\tau_l\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}} - \frac{\eta}{\eta+1}\tau_l \left(1-\tau_l\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}-1} \right] = 0 \\
\Leftrightarrow \left(1-\tau_l\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}} = \frac{\eta}{\eta+1}\tau_l \left(1-\tau_l\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}-1} \\
\Leftrightarrow \left(1-\tau_l\right) = \frac{\eta}{\eta+1}\tau_l \\
\Leftrightarrow 1 = \frac{2\eta+1}{\eta+1}\tau_l \\
\Leftrightarrow \tau_l = \frac{\eta+1}{2\eta+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_l^*}{\partial \eta} &= \frac{(2\eta+1)-2(\eta+1)}{(2\eta+1)^2} \\
&= \frac{-1}{(2\eta+1)^2} < 0
\end{aligned}$$

Es decir, la tasa óptima (desde un punto de vista recaudativo) es decreciente en η. Intuitivamente, entre más elástica sea la oferta laboral, menor debería ser la tasa que grava el salario.

3. **(Función de inversión)** Considere una empresa que opera durante tres períodos. La empresa produce su producto en cada período de acuerdo con la siguiente función de producción:

$$Y = AK^{\alpha}N^{1-\alpha} \quad \text{con} \quad 0 < \alpha < 1$$

El stock de capital en el periodo t está exógenamente dado. La empresa puede influir en su stock de capital futuro a través de la inversión. El capital se acumula de acuerdo con:

$$K_{t+j+1} = I_{t+j} + (1-\delta)K_{t+j} \quad \text{para } j = 0, 1, 2$$

La empresa se liquida a sí misma (es decir, vende el capital restante que no se ha depreciado durante el período) al final del tercer período. El objetivo de la empresa es maximizar su valor, dado por:

$$V = D_t + \frac{D_{t+1}}{1+r} + \frac{D_{t+2}}{(1+r)^2}$$

donde D denota las ganancias, que se pagan como dividendos a sus propietarios, y la empresa toma la tasa de interés como dada. La empresa financia completamente su inversión mediante la emisión de deuda (bonos), tal que:

$$B_{t+j}^{I} = I_{t+j} \quad \text{para } j = 0, 1$$

Los bonos para financiar la inversión están ligados a una tasa de interés real r, que es constante en el tiempo.

a) ¿Cuál es la condición terminal para K_{t+3}? Escriba las expresiones tanto para las ganancias actuales como para las futuras, D_t, D_{t+1} y D_{t+2}.
Como $K_{t+3} = I_{t+2} + (1-\delta)K_{t+2}$, la empresa va a querer $K_{t+3} = 0$. Esto implica que $I_{t+2} = -(1-\delta)K_{t+2}$. Es decir, la empresa vende el capital después de depreciación al finalizar el periodo $t+2$. Así:

$$\begin{aligned} D_t &= Y_t - w_t N_t \\ D_{t+1} &= Y_{t+1} - w_{t+1}N_{t+1} - B_t^I(1+r_t) \\ D_{t+2} &= Y_{t+2} + (1-\delta)K_{t+2} - w_{t+2}N_{t+2} - B_{t+1}^I(1+r_t) \end{aligned}$$

b) Escriba el problema de optimización de la empresa. ¿Cuáles son las variables de elección?

$$\max_{N_t, N_{t+1}, N_{t+2}, K_{t+1}, K_{t+2}} V = D_t + \frac{D_{t+1}}{1+r} + \frac{D_{t+2}}{(1+r)^2}$$

Con

$$\begin{aligned} D_t &= A_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - w_t N_t \\ D_{t+1} &= A_{t+1}K_{t+1}^{\alpha}N_{t+1}^{1-\alpha} - w_{t+1}N_{t+1} - \left(K_{t+1} - (1-\delta)K_t\right)(1+r) \\ D_{t+2} &= A_{t+2}K_{t+2}^{\alpha}N_{t+2}^{1-\alpha} + (1-\delta)K_{t+2} - w_{t+2}N_{t+2} - \left(K_{t+2} - (1-\delta)K_{t+1}\right)(1+r) \end{aligned}$$

Las variables de elección son $\{N_t, N_{t+1}, N_{t+2}, K_{t+1}, K_{t+2}\}$

c) Obtenga la condición de optimalidad para la demanda laboral para el periodo t.

$$\frac{\partial V}{\partial N_t} = (1-\alpha)A_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} = w_t$$

En general, se puede ver que

$$\frac{\partial V}{\partial N_{t+j}} = (1-\alpha)A_{t+j}K_{t+j}^{\alpha}N_{t+j}^{-\alpha} = w_{t+j}$$

d) Resuelva algebraicamente la elección óptima de inversión de la empresa en cada periodo. Interprete cada condición.

$$\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}} = \left(\frac{1}{1+r}\right)\left(\alpha A_{t+1}K_{t+1}^{\alpha-1}N_{t+1}^{1-\alpha} - (1+r)\right) + \left(\frac{1}{(1+r)^2}\right)((1-\delta)(1+r)) = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha A_{t+1}K_{t+1}^{\alpha-1}N_{t+1}^{1-\alpha} - (1+r) + (1-\delta) = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha A_{t+1}K_{t+1}^{\alpha-1}N_{t+1}^{1-\alpha} = r+\delta$$

Que es la misma condición de optimalidad que la derivada para dos periodos. Similarmente:

$$\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}} = \left(\frac{1}{(1+r)^2}\right)\left(\alpha A_{t+2}K_{t+2}^{\alpha-1}N_{t+2}^{1-\alpha} + (1-\delta) - (1+r)\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha A_{t+2}K_{t+2}^{\alpha-1}N_{t+2}^{1-\alpha} + (1-\delta) - (1+r) = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha A_{t+2}K_{t+2}^{\alpha-1}N_{t+2}^{1-\alpha} = r+\delta$$

Que es la misma condición de optimalidad pero fechada en $t+2$.

4. **Heterogeneidad en una economía de dotación:** Suponga que tenemos una economía de dotación, pero con dos tipos diferentes de agentes. Hay suficientes agentes de cada tipo para que todos se comporten como tomadores de precios. Los agentes difieren en sus flujos de dotación: los agentes de tipo 1 tienen un patrón de dotación $(Y_t^1, Y_{t+1}^1) = (1, 0)$, mientras que los agentes de tipo 2 tienen un patrón de dotación $(Y_t^2, Y_{t+1}^2) = (0, 1)$. En otras palabras, los agentes de tipo 1 tienen ingresos hoy pero ninguno en el futuro, mientras que los agentes de tipo 2 no tienen ingresos hoy pero sí uno en el futuro. Supongamos que hay M^1 agentes de tipo 1 y M^2 agentes de tipo 2. Estos agentes pueden ahorrar o endeudarse a la tasa de interés real común, r_t. El

problema para cada tipo $i = 1, 2$ está dado por:

$$\begin{array}{cc} \max_{C_t^i, S_t^i, C_{t+1}^i} & U = \ln C_t^i + \beta \ln C_{t+1}^i \\ \text{s.a.} & \\ C_t^i + S_t^i = Y_t^i & \\ C_{t+1}^i = Y_{t+1}^i + (1 + r_t)\, S_t^i & \end{array}$$

a) Obtenga la ecuación de Euler que caracteriza el plan de consumo óptimo para los agentes tipo 1. Utilícela para obtener la función de consumo individual del hogar tipo 1.
La ecuación de Euler está dada por:

$$\frac{C_{t+1}^i}{C_t^i} = \beta(1 + r_t) \quad i = 1, 2$$

Sustituyendo en la RPI, se llega a la función de consumo:

$$C_t^i = \frac{1}{1+\beta}\left[Y_t^i + \frac{Y_{t+1}^i}{1+r_t}\right]$$

Dado que el flujo de ingreso del hogar tipo 1 es $\left(Y_t^1, Y_{t+1}^1\right) = (1, 0)$, entonces:

$$C_t^1 = \frac{1}{1+\beta}$$

b) Use su función de consumo de (a) para derivar una función de ahorro individual para el hogar tipo 1.
El ahorro está dado por:

$$\begin{aligned} S_t^i &= Y_t^i - C_t^i \\ &= Y_t^i - \frac{1}{1+\beta}\left[Y_t^i + \frac{Y_{t+1}^i}{1+r_t}\right] \\ &= \frac{\beta}{1+\beta} Y_t^i - \frac{1}{1+\beta}\frac{Y_{t+1}^i}{1+r_t} \end{aligned}$$

Entonces,

$$S_t^1 = \frac{\beta}{1+\beta} > 0$$

Es decir, el hogar tipo 1 es ahorrante.

c) Obtenga la función de consumo y de ahorro individual para el hogar tipo 2.
Del inciso a y dado que $\left(Y_t^2, Y_{t+1}^2\right) = (0, 1)$, entonces:

$$C_t^2 = \frac{1}{(1+\beta)(1+r_t)}$$

Y del inciso b, la función de ahorro es:

$$S_t^2 = -\frac{1}{(1+\beta)(1+r_t)}$$

Por tanto, el hogar tipo 2 es deudor.

d) En equilibrio, ¿qué tiene que ser cierto sobre $M^1 S_t^1$ (ahorro agregado de los hogares tipo 1) y $M^2 S_t^2$ (ahorro agregado de los hogares tipo 2)?
Como no hay inversión y en equilibrio no puede haber excesos en el mercado de fondos prestables, el ahorro agregado debe ser igual a cero. Es decir:

$$N^1 S_t^1 + N^2 S_t^2 = 0$$

e) Use la condición de equilibrio planteada en (d) para encontrar la tasa de interés real de equilibrio, así como las asignaciones de consumo de equilibrio para cada tipo de agente (C_t^1 y C_t^2).

$$\begin{aligned} N^1 S_t^1 + N^2 S_t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow N^1 \frac{\beta}{1+\beta} - N^2 \frac{1}{(1+\beta)(1+r_t)} &= 0 \\ \Leftrightarrow N^1 \frac{\beta}{1+\beta} &= N^2 \frac{1}{(1+\beta)(1+r_t)} \\ \Leftrightarrow 1 + r_t &= \frac{N^2}{\beta N^1} \end{aligned}$$

Sustituyendo la tasa de interés real en la función de consumo para el hogar tipo 1:

$$C_t^1 = \frac{1}{1+\beta}$$

y para el hogar tipo 2:

$$C_t^2 = \frac{\beta N^1}{(1+\beta) N^2}$$

f) Suponga que hay un aumento en el número de hogares tipo 2 (es decir, M^2 aumenta). ¿Cómo afecta esto la tasa de interés real de equilibrio y las asignaciones de consumo? ¿Los hogares tipo 1 estarían mejor o peor (desde un punto de vista de bienestar) a raíz del incremento en la población del hogar tipo 2?

Del inciso e, el consumo del hogar tipo 1 no cambia. El consumo del hogar tipo 2 sí cambia: Dado que

$$\downarrow C_t^2 = \frac{\beta N^1}{(1+\beta) \uparrow N^2}$$

un aumento en N^2 disminuye el consumo del hogar tipo 2. Intuitivamente, esto es porque hay más agentes deudores en la economía demandando ahorro, por lo que la tasa de interés sube:

$$\Leftrightarrow 1 + \uparrow r_t = \frac{\uparrow N^2}{\beta N^1}$$

Esto reduce la capacidad de financiar el consumo presente para el hogar tipo 2. En el caso del hogar tipo 1, el consumo en t es

$$C_t^1 = \frac{1}{1+\beta}$$

que no depende de la tasa de interés real. Su consumo en $t+1$ (determinado por la Ecuación de Euler) está dado por:

$$\begin{aligned} C_{t+1}^1 &= \frac{\beta(1+r_t)}{1+\beta} \\ &= \frac{1}{1+\beta} \frac{N^2}{N^1} \end{aligned}$$

por tanto, su consumo en $t+1$ aumenta. Esto porque el hogar tipo 1 es un ahorrante, por lo que mayor demanda por su ahorro va a generar que la rentabilidad de dicho ahorro (determinado por r) incremente. Esto expande sus posibilidades de consumo futuro. Así, como

$$U = \ln C_t^1 + \beta \ln C_{t+1}^1$$

Entonces, U es mayor gracias al mayor consumo en $t+1$ y al cambio nulo en C_t^1,por lo que el bienestar del hogar tipo 1 es más alto.