EC3201 Teoría Macroeconómica 2
I Examen

Prof. Jonathan Garita

I-2024

1. **(Heterogeneidad y consumo)** Suponga que hay un continuo de hogares, los cuales están indexados por $i \in [0,1]$. Los agentes viven durante dos períodos, t y $t+1$. Los agentes están dotados con un flujo exógeno y perfectamente conocido de ingresos, $Y_t(i)$ y $Y_{t+1}(i)$. Piense en las unidades de ingresos como frutas. La fruta no se puede almacenar.

   En el período t, los agentes determinan cuánto consumir, $C_t(i)$, y cuánto ahorrar. Los agentes tienen acceso a un bono sin riesgo a un período, $B_t(i)$, que se negocia a un precio q_t y se paga uno a uno en $t+1$.

   Los agentes tienen una misma función de utilidad de flujo dada por $u(\cdot)$, donde $u'(\cdot) > 0$ y $u''(\cdot) \leq 0$. Los agentes descuentan los flujos de utilidad futura por $0 < \beta < 1$. La utilidad vitalicia es:

$$\mathbb{U}(i) = u\left(C_t(i)\right) + \beta u\left(C_{t+1}(i)\right)$$

   El problema de decisión de un agente es elegir una secuencia de consumo, $C_t(i)$ y $C_{t+1}(i)$, y tenencias de bonos, $B_t(i)$, para maximizar la utilidad vitalicia sujeta a dos restricciones presupuestarias temporales.

   (a) Plantee el problema del hogar. Especifique claramente las restricciones presupuestarias y las variables de elección.

$$\begin{gathered}
\max_{C_t(i), C_{t+1}(i), B_t(i)} u\left(C_t(i)\right) + \beta u\left(C_{t+1}(i)\right) \\
\text{s.a.} \\
C_t(i) + q_t B_t(i) = Y_t(i) \\
C_{t+1}(i) = Y_{t+1}(i) + B_t(i)
\end{gathered} \tag{1}$$

(b) Obtenga la condición de optimalidad el hogar i. ¿Cómo difiere la relación de consumo presente y consumo futuro entre los hogares?

El lagrangiano es

$$\begin{aligned}\mathbb{L} = u\left(C_t(i)\right) + \beta u\left(C_{t+1}(i)\right) + \lambda_t(i)\left(Y_t(i) - C_t(i) - q_t B_t(i)\right) \\ +\lambda_{t+1}(i)\left(Y_{t+1}(i) + B_t(i) - C_{t+1}(i)\right)\end{aligned} \tag{2}$$

Las condiciones de primer orden (CPO) son:

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial C_t(i)} = 0 \Longleftrightarrow u'\left(C_t(i)\right) = \lambda_t(i)$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial C_{t+1}(i)} = 0 \Longleftrightarrow \beta u'\left(C_{t+1}(i)\right) = \lambda_{t+1}(i)$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial B_t(i)} = 0 \Longleftrightarrow q_t \lambda_t(i) = \lambda_{t+1}(i)$$

Combinando, tenemos que:

$$q_t = \frac{\beta u'\left(C_{t+1}(i)\right)}{u'\left(C_t(i)\right)}$$

Note que, dado que el factor de impaciencia, la función de utilidad y q_t es el mismo para todos los hogares, entonces la relación de consumo intertemporal es la misma para todos los hogares.

(c) Plantee el equilibrio general competitivo de esta economía. No olvide la condición de aclaramiento de los mercados.

El equilibrio consiste en $\{C_t(i), C_{t+1}(i), B_t(i), q_t\}$ tales que:

i. Para cada hogar i, se cumple que:

$$q_t = \frac{\beta u'\left(C_{t+1}(i)\right)}{u'\left(C_t(i)\right)}$$

y

$$\begin{aligned}C_t(i) + q_t B_t(i) &= Y_t(i) \\ C_{t+1}(i) &= Y_{t+1}(i) + B_t(i)\end{aligned}$$

ii. Los mercados se aclaran:

$$\int_0^1 B_t(i)di = 0$$

(d) Obtenga una restricción de recursos agregada para cada período en esta economía. Para ello, defina C_t y C_{t+1} como el consumo agregado. Similarmente, Y_t y Y_{t+1} como el ingreso agregado. Luego, sume la restricción presupuestaria de todos los agentes en cada periodo y utilice la condición de vaciado del inciso anterior.

Sumando para cada hogar i:

$$\begin{aligned} \int_0^1 C_t(i)di + q_t \int_0^1 B_t(i)di &= \int_0^1 Y_t(i)di \\ \int_0^1 C_{t+1}(i)di &= \int_0^1 Y_{t+1}(i)di + \int_0^1 B_t(i)di \end{aligned} \tag{3}$$

Usando la condición de aclaramiento de esta economía $\left(\int_0^1 B_t(i)di = 0\right)$ y la definición de variables agregadas del inciso $\left(\text{Ej.: } C_t \equiv \int_0^1 C_t(i)di\right)$:

$$\begin{aligned} C_t &= Y_t \\ C_{t+1} &= Y_{t+1} \end{aligned} \tag{4}$$

Es decir, el consumo agregado es igual a la dotación agregada en cada período.

(e) Suponga que $u(c) = \log(c)$. Suponga además que hay dos tipos de hogares. Los agentes de tipo 1 tienen un flujo de dotación de $(Y_t(1), Y_{t+1}(1)) = (1, 0)$, y los agentes de tipo 2 tienen un flujo de dotación de $(Y_t(2), Y_{t+1}(2)) = (0, 1)$. Hay una masa, $\alpha \in [0, 1]$, de agentes de tipo 1, y $1 - \alpha$ de agentes de tipo 2. Obtenga la función de consumo presente, $C_t(i)$ y la función de demanda de bonos, $B_t(i)$ para cada tipo de hogar.

Usando la ecuación de optimalidad y la función log:

$$\frac{C_{t+1}(i)}{C_t(i)} = \beta\,(1 + r_t) \tag{5}$$

Combinando la restricción presupuestaria en una intertemporal, se tiene que, para cada hogar i:

$$C_t(i) + q_t C_{t+1}(i) = Y_t(i) + q_t Y_{t+1}(i) \tag{6}$$

Introduciendo la condición de optimalidad en la ecuación anterior:

$$C_t(i) = \frac{1}{1+\beta}\,(Y_t(i) + q_t Y_{t+1}(i)) \tag{7}$$

Así, la función de consumo presente para cada tipo de hogar está dada por:

$$C_t(1) = \frac{1}{1+\beta} \tag{8}$$
$$C_t(2) = \frac{q_t}{1+\beta} \tag{9}$$

Usando la restricción presupuestaria del periodo t, la demanda del bono viene dada por:

$$\begin{aligned}
B_t(i) &= \frac{1}{q_t}\left(Y_t(i) - C_t(i)\right) \\
&= \frac{1}{q_t}\left(Y_t(i) - \frac{1}{1+\beta}\left(Y_t(i) + q_t Y_{t+1}(i)\right)\right) \\
&= \frac{1}{q_t}\left(\frac{\beta}{1+\beta}Y_t(i) - \frac{q_t}{1+\beta}Y_{t+1}(i)\right) \\
&= \frac{1}{q_t}\frac{\beta}{1+\beta}Y_t(i) - \frac{1}{1+\beta}Y_{t+1}(i)
\end{aligned}$$

Así, la demanda del bono para cada tipo de hogar es:

$$B_t(1) = \frac{1}{q_t}\frac{\beta}{1+\beta} \tag{10}$$
$$B_t(2) = -\frac{1}{1+\beta} \tag{11}$$

(f) Utilice la definición de equilibrio para obtener el precio de equilibrio q_t de esta economía.

De la condición de aclaramiento, tenemos que:

$$\int_0^1 B_t(i)di = \alpha B_t(1) + (1-\alpha)B_t(2) = 0 \tag{12}$$

Sustituyendo con la demanda de bonos para cada tipo de hogar, obtenemos el precio de equilibrio:

$$\alpha\left(\frac{1}{q_t}\frac{\beta}{1+\beta}\right) - \frac{1-\alpha}{1+\beta} = 0 \tag{13}$$
$$q_t = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha} \tag{14}$$

(g) Obtenga la demanda de bonos de equilibrio.

Sustituyendo el precio de equilibrio q_t nuevamente en la demanda de bonos de cada tipo de hogar, tenemos que:

$$B_t(1) = \frac{1-\alpha}{\alpha(1+\beta)} \tag{15}$$

$$B_t(2) = -\frac{1}{1+\beta} \tag{16}$$

(h) Obtenga el consumo presente de equilibrio.

Y el consumo de equilibrio final está dado por:

$$C_t(1) = \frac{1}{1+\beta} \tag{17}$$

$$C_t(2) = \frac{\alpha\beta}{(1+\beta)(1-\alpha)} \tag{18}$$

(i) Obtenga el consumo agregado. ¿Se cumple que $C_t = Y_t$?

El consumo agregado está dado por:

$$C_t = \int_0^1 C_t(i)di = \alpha C_t(1) + (1-\alpha)C_t(2) = \frac{\alpha}{1+\beta} + \frac{\alpha\beta}{1+\beta} = \alpha \tag{19}$$

La dotación agregada es:

$$Y_t = \int_0^1 Y_t(i)di = \alpha \tag{20}$$

Por tanto, $C_t = Y_t$

2. **(Equilibrio general con empleo)** Considere una economía con la siguiente configuración:

Preferencias:

$$u(c) - v(h)$$

$c:$ consumo de cocos, $u'(c) > 0, u''(c) < 0$.
$h:$ horas trabajadas, $v'(h) > 0, v''(h) > 0$

Tecnología:

$$y = f(n)$$

$y:$ producto, ej. producción de cocos.
$n:$ horas empleadas, $f'(n) > 0, f''(n) < 0$

Suponga además que:

$$u(c) = \log c, \quad v(n) = \theta \frac{n^{1+1/\varepsilon}}{1+1/\varepsilon}, \quad \theta, \varepsilon > 0$$

$$f(n) = An^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, A > 0$$

(a) Defina el equilibrio competitivo de esta economía.

El problema del hogar está dado por:

$$\max_{c,h} \log(c) - \theta \frac{h^{1+1/\varepsilon}}{1+1/\varepsilon} \quad \text{s.t.} \quad c = wh + D \tag{21}$$

Con D los dividendos que recibe de la empresa. La condición de optimalidad está dada por:

$$\frac{\theta h^{1/\varepsilon}}{1/c} = w \tag{22}$$

Sustituyendo con la restricción presupuestaria:

$$\theta h^{1/\varepsilon}(wh + D) = w \tag{23}$$

El problema de la empresa consiste en maximizar ganancias o sus dividendos que devuelve al hogar:

$$D = \max_{n} An^{\alpha} - wn \tag{24}$$

La condición de optimalidad se resume en:

$$\alpha A n^{\alpha-1} = w \tag{25}$$

Entonces, el equilibrio competitivo consiste en $\{c, n, y, h, w\}$ tales que:

i. El hogar maximiza su utilidad, tomando w dado:

$$\theta h^{1/\varepsilon}(wh + D) = w$$

ii. La empresa maximiza dividendos:

$$n = \left(\frac{\alpha A}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

iii. Se sigue la tecnología dada:

$$y = An^{\alpha}$$

iv. Los mercados se aclaran:

$$c = y; \quad h = n$$

Note que tenemos cinco ecuaciones para cinco variables endógenas.

(b) Resuelva el equlibrio competitivo de esta economía.

Igualando la condición de optimalidad del hogar y la empresa, y simultáneamente usando la condición de vaciado del mercado laboral:

$$\theta n^{1/\varepsilon} c = \alpha A n^{\alpha-1} \tag{26}$$

La restricción presupuestaria del hogar implica que:

$$\begin{aligned} c &= wn + D \\ &= wn + An^{\alpha} - wn \\ &= An^{\alpha} \end{aligned}$$

Introduciendo en la condición de optimalidad conjunta:

$$\theta n^{1/\varepsilon} A n^{\alpha} = \alpha A n^{\alpha-1} \tag{27}$$

Así:

$$n = \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tag{28}$$

Por tanto:

$$y = c = A\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^{\frac{\alpha\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tag{29}$$

Y finalmente,

$$w = \alpha A\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^{\frac{\varepsilon(\alpha-1)}{1+\varepsilon}} \tag{30}$$

(c) Defina el equilibrio centralizado de esta economía.

El equilibrio centralizado consiste en $\{c, n, y\}$ tal que:

i.
$$\theta n^{1/\varepsilon} c = \alpha A n^{\alpha-1} \tag{31}$$

ii.
$$y = An^{\alpha} \quad c = y$$

(d) Resuelva el equilibrio centralizado de esta economía.

Se llega a la misma asignación que el equilibrio competitivo

3. **(Desigualdad de consumo y herencias)** Considere un hogar que empieza el periodo t sin herencias y resuelve el problema

$$\max_{C_t, C_{t+1}, C_{t+2}} U = \sum_{j=0}^{T} \beta^j \log(C_{t+j})$$

s.a.

$$\sum_{j=0}^{T} \frac{C_{t+j}}{(1+r)^j} = \sum_{j=0}^{T} \frac{Y_{t+j}}{(1+r)^j}$$

Considere otro tipo de hogar pero que empieza el periodo t con una herencia valorada en $H > 0$ unidades del bien de consumo. Ambos hogares van a recibir el mismo flujo de ingreso, tienen las mismas preferencias y nivel de impaciencia, la única diferencia es que un hogar fue afortunado en recibir la herencia.

(a) Determine la diferencia en el consumo presente de ambos hogares. La condición de primer orden para ambos hogares está dada por:

$$C_{t+j} = \beta(1+r)C_{t+j-1} \tag{32}$$

Así, para todo $j > 0$:

$$\frac{C_{t+j}}{(1+r)^j} = C_t \tag{33}$$

Sustituyendo en la RPI:

$$\sum_{j=0}^{T} C_t = \bar{Y} \tag{34}$$

$$C_t = \frac{1}{1+T}\bar{Y} \tag{35}$$

Es decir, ambos hogares consumen una misma fracción $\frac{1}{1+T}$ de su ingreso permanente. La diferencia está en su ingreso permanente. Para el hogar sin herencias,

$$\bar{Y} \equiv \sum_{j=0}^{T} \frac{Y_{t+j}}{(1+r)^j}$$

Para el hogar con herencia:

$$\bar{Y}_H \equiv H + \sum_{j=0}^{T} \frac{Y_{t+j}}{(1+r)^j}$$

(b) Suponga que $\beta(1+r) > 1$. ¿Qué tan distinto es la dinámica de consumo en el tiempo entre ambos hogares? Es decir, ¿es el consumo entre ambos hogares persistentemente distinto o solo inicialmente? Como

$$\frac{C_{t+j+1}}{C_{t+j}} = \beta(1+r) \tag{36}$$

Si $\beta(1+r) > 1$, entonces el consumo va a crecer en el tiempo. Como C_t, el consumo inicial es más alto para el hogar con herencia y el consumo crece a una misma tasa para ambos hogares, entonces el consumo del hogar con herencia es persistentemente más alto que el hogar sin herencia, a pesar de tener las mismas preferencias y el mismo patrón de ingreso.