Un modelo sencillo de equilibrio general

Prof. Jonathan Garita

Universidad de Costa Rica

II-2023

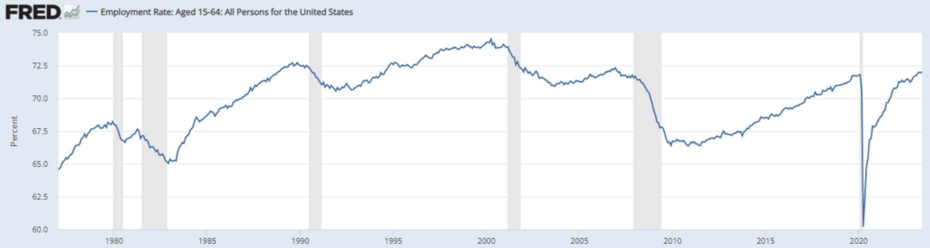
Introducción

- La mayoría de modelos macroeconómicos se basan en datos para racionalizar tendencias y patrones

- Ejemplo de un modelo: las empresas demandan trabajo para maximizar utilidades:

$$\max_{n} f(n) - wn$$

Con n el trabajo, $f(n)$ el producto (f la función de producción), w el salario.



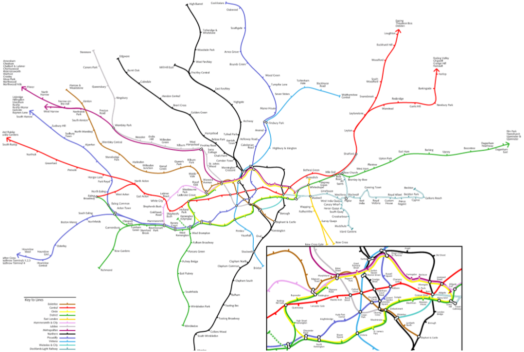
La interacción entre los modelos y los datos

- ¿Cómo pensar en la interacción entre la teoría y los datos?
  - ¿Por qué no solo datos?
  - ¿Por qué no solo modelos?
- Teoría sin datos:
  - “Theory will take you only so far” (Oppenheimer (Film) 2023)
  - “Smart kids playing in sandbox”
- Datos sin teoría:
  - “Dejar que los datos hablen” es una ficción
  - No hay un artículo en economía sin un modelo (implícito)
  - Las preguntas sobre implicaciones o diseño de políticas son contrafactuales: ¿Qué pasa en un mundo con política relativo a uno sin política?)
  - Construir contrafactuales requiere modelos (a falta de experimentación)

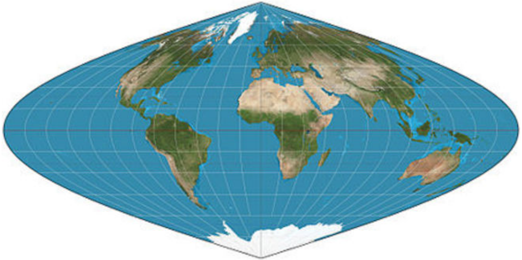
La modelación en macroeconomía

- El objetivo no es un modelo grande que resuelva todos los problemas
  - El realismo descriptivo no es el objetivo
  - Se hacen escogencias de los modelos dependiendo del fenómeno que se quiera explicar
  - Si el modelo es “bueno” depende del contexto
- Algunos puntos importantes
  - Todos los modelos son incorrectos, pero algunos son útiles
  - La idea es desarrollar herramientas para identificar los mecanismos principales que afectan la economía

La modelación en macroeconomía



La modelación en macroeconomía



Hacia un modelo macro sencillo

- Versión bebé. Una visión muy simplificada pero útil para entender conceptos $\Rightarrow$ Economía de Robinson Crusoe

- Preferencias (es decir, función de utilidad):

$$U(c, h)$$

  con c: consumo de cocos, U creciente en c, h: horas trabajadas, U decreciente en h

- Tecnología (función de producción):

$$y = f(n)$$

  Con y : el producto (cocos), n : horas empleadas, f creciente en n

- Restricciones de recursos:

$$c = y, \quad n = h$$

- Robinson Crusoe está solo en una isla, vive solo de cocos y cosechar los cocos toma tiempo.

Sobre el agente representativo

- Note que este modelo es de un “agente representativo”: un “hogar representativo” y una “empresa representativa”

- ¿Cuándo se justifica esta estructura? Al menos una de las tres condiciones se deben cumplir:
    1. Todos los individuos en la economía son idénticos
    2. Supuestos particulares sobre las preferencias (homoteticidad, agregación Gorman)
    3. Mercados perfectos
        - Empresa representativa $\Leftrightarrow$ mercados de insumos perfectos (capital y trabajo), se igualan los productos marginales
        - Hogar representativo $\Leftrightarrow$ Mercados de seguros perfectos, se igualan las utilidades marginales

- ¿Creemos que estas condiciones se cumplen? No, pero...

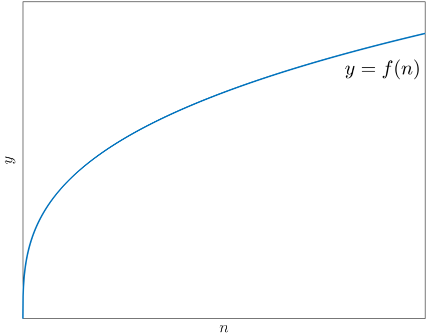
Función de producción

- La empresa representativa tiene una función de producción

$$y = f(n)$$

Con: $f'(n) > 0$ and $f''(n) < 0$ for all n

- Ejemplo: $f(n) = An^{\alpha}$ con $0 < \alpha < 1, A > 0$



Demanda laboral

- La empresa representativa maximiza ganancias:

$$\Pi = \max_{n} f(n) - wn$$

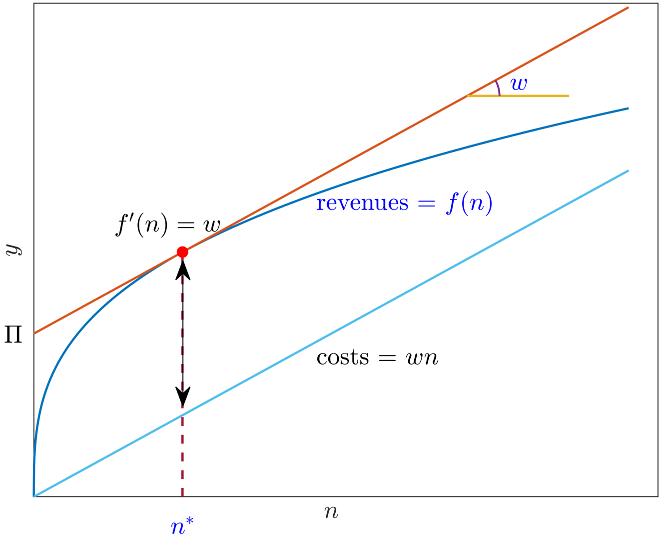
- La solución es una función de demanda laboral

$$n^{*} = n^{d}(w)$$

- Condición de optimalidad

$$f'(n) = w$$

Demanda laboral: Representación gráfica



Demanda laboral: Ejemplo paramétrico

- Ejemplo: $f(n) = An^{\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$, $A > 0$
- La demanda laboral óptima (maximiza ganancias) es

$$n^* = n^d(w) = \left(\frac{\alpha A}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Que es:

- decreciente en el salario w (típica curva de demanda)
- creciente en productividad A

Oferta laboral

- **Preferencias**

$$u(c) - v(h)$$

  Con $c =$ consumo, $h =$ horas trabajadas, $v(h) =$ desutilidad del trabajo
- Supuestos:
- $u'(c) > 0$ y $v'(h) > 0$
- $u''(c) < 0$ y $v''(h) > 0$ la disutilidad es convexa
- Vínculo con la formulación de ocio: considere $v(h) = -\tilde{v}(1-h) \Rightarrow$. Ambas formas son equivalentes.
- Ejemplo 1: $u(c) = \log c, v(h) = -\theta \log(1-h), \theta > 0$
- Ejemplo 2:

$$u(c) = \log c, \quad v(h) = \theta \frac{h^{1+1/\varepsilon}}{1+1/\varepsilon}, \quad \theta, \varepsilon > 0 \left(\text{note: } v'(h) = \theta h^{1/\varepsilon} \right)$$

Oferta laboral

- El hogar representativo resuelve:

$$\max_{c,h} u(c) - v(h) \quad \text{s.a.} \quad c = wh + \Pi$$

- Explicación:
  - La dotación de tiempo del hogar normalizada a $= 1$
  - Horas trabajadas $h = 1 - \ell$
  - $w(1 - \ell) = wh =$ es el ingreso laboral
  - $\Pi =$ es otro ingreso no laboral. Por ejemplo, los dividendos de tener acciones o bonos corporativos

- Solución: una función de oferta laboral

$$h^* = h^S(w) = 1 - \ell^*$$

Oferta laboral

- Dos estrategias equivalentes para encontrar la solución interior:
  1. Sustitución directa

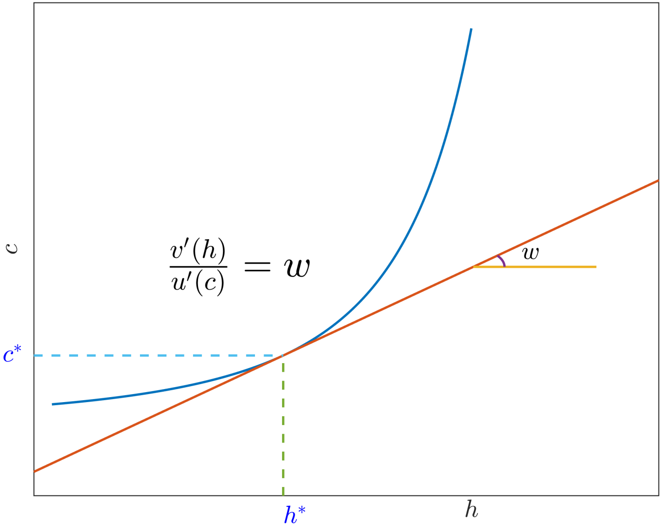
$$\max_{h} u(\underbrace{wh+\Pi}_{c}) - v(h) \Rightarrow -u'(c)w - v'(h) = 0$$

  2. Lagrangiano

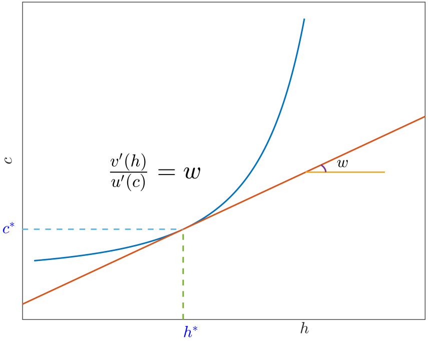
$$L = u(c) - v(h) + \lambda[wh + \Pi - c]$$

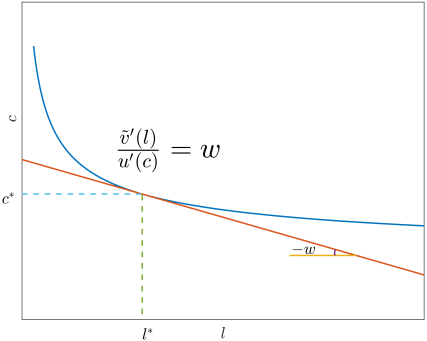
$$\left.\begin{array}{ll} c: & u'(c) = \lambda \\ \ell: & v'(h) = \lambda w \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{v'(h)}{u'(c)} = w$$

Oferta laboral: Representación gráfica



Oferta laboral: Representación gráfica





Problema de Robinson Crusoe

1. Asignación óptima de recursos
   - Robinson planea óptimamente cuánto consumir y cuánto trabajar
   - No hay mercados, ni precios bajo esta organización. Solo cantidades físicas de cocos y trabajo (asignación).
2. Equilibrio competitivo descentralizado
   - Hogar representativo con una función de utilidad $u(c) - v(h)$
   - Empresa representativa con una función de producción $y = f(n)$ ("Crusoe S.A.")
   - (Piense en un número grande de hogares idénticos y un número grande de empresas idénticas en lugar de un solo individuo)
   - Mercado competitivo de cocos: los hogares compran, las empresas venden cocos
   - Mercado laboral competitivo: los hogares ofrecen trabajo, las empresas demandan trabajo

1. Asignación óptima de recursos

- Robinson escoge c and n que maximice su utilidad $u(c) - v(n)$ sujeto a la restricción que él solo puede consumir lo que coseche: $c = f(n)$

$$\max_{c,n} u(c) - v(n) \quad \text{s.a.} \quad c = f(n)$$

- Note: hemos usado $c = y$ y $n = h$ para eliminar y y h
- Condición de optimalidad: $u'(c)f'(n) = v'(n)$ o equivalentemente:

$$\frac{v'(n)}{u'(c)} = f'(n)$$

- Junto con $c = f(n)$ se determina la asignación óptima (n^*, c^*)

1. Asignación óptima de recursos: Ejemplo paramétrico

- Función de producción

$$f(n) = An^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, A > 0$$

- Función de utilidad

$$u(c) = \log c, \quad v(n) = \theta \frac{n^{1+1/\varepsilon}}{1+1/\varepsilon}, \quad \theta, \varepsilon > 0 \left(\text{note: } v'(n) = \theta n^{1/\varepsilon} \right)$$

- Condición de optimalidad

$$\frac{v'(n)}{u'(c)} = f'(n) \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta n^{1/\varepsilon}}{1/c} = \alpha A n^{\alpha-1}$$

- Usando que $c = An^{\alpha}$, la solución es

$$n^* = \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \quad c^* = A\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^{\frac{\alpha\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

- ¿Cómo varían estas asignaciones óptimas con $A, \theta, \ldots$ y por qué?

2. Equilibrio competititivo

- Un equilibrio competitivo (CE) son cantidades y precios que satisfacen simultáneamente:
    1. Los hogares maximizan su utilidad, tomando los precios como dados
    2. Las empresas maximizan sus ganancias, tomando los precios como dados
    3. Todos los mercados se aclaran (vacían)
- Supuesto: los agentes son tomadores de precios
    - Implica que la empresa no tiene poder de mercado: no puede incidir en precios. Que no implica que los precios no cambien.
    - Es plausible si todas las empresas tienen una cuota de mercado muy pequeña, hay un bien homogéneo y todos observan los precios.

2. Equilibrio competititivo

- Tenemos un caso especial con:
  - I = 1 consumidor: hogar representativo
  - $J = 1$ productor: empresa representativa
  - $K = 1$ factor de producción: trabajo
  - $L = 1$ bien final: cocos
- Precios:
  - Cocos es el numerario: el modelo está expresado en términos de cocos. Los precios son relativos a cocos. Por tanto, $P_{\text{coco}} = 1$
  - El único precio es el salario (= precio del trabajo)
- Propiedad: el hogar representativo es dueño de la empresa representativa y, por tanto, recibe sus ganancias como dividendos

Definición de equilibrio competitivo de Robinson Crusoe

- **Definición:** un equilibrio competitivo en la economía de Robinson crusoe consiste en cantidades $\{c, y, n, h\}$ y precios $\{w\}$ tales que:

1. **Maximización de la utilidad**: tomando w como dado (y también Π), el hogar representativo escoge (c, h) para resolver

$$\max_{c,h} u(c) - v(h) \quad \text{s.a.} \quad c = wh + \Pi$$

2. **Maximización de ganancias**: tomando w como dado, la empresa representativa escoge n y $y = f(n)$ para resolver

$$\Pi = \max_{n} f(n) - wn$$

3. Condición de aclaramiento (vaciado): No hay exceso de oferta o demanda en el mercado de bienes (cocos) ni en el mercado de insumos (laboral)

$$\text{Mercado de cocos:} \quad c = y$$

$$\text{Mercado laboral:} \quad n = h$$

Ecuaciones que definen el EC de Robinson Crusoe

- **Definición:** un equilibrio competitivo en la economía de Robinson crusoe consiste en cantidades $\{c, y, n, h\}$ y precios $\{w\}$ tales que:

1. **Maximización de la utilidad**: tomando w como dado (y también Π), el hogar representativo escoge (c, h) para resolver

$$\frac{v'(h)}{u'(c)} = w$$

2. **Maximización de ganancias**: tomando w como dado, la empresa representativa escoge n y $y = f(n)$ para resolver

$$f'(n) = w$$

3. Condición de aclaramiento (vaciado): No hay exceso de oferta o demanda en el mercado de bienes (cocos) ni en el mercado de insumos (laboral)

$$\text{Mercado de cocos:} \quad c = y$$

$$\text{Mercado laboral:} \quad n = h$$

Ecuaciones que definen el EC de Robinson Crusoe

- Resumen: un EC consiste en cantidades $\{c, y, n, h\}$ y precios $\{w\}$ tales que:

$$\frac{v'(h)}{u'(c)} = w \quad (1)$$
$$f'(n) = w \quad (2)$$
$$y = f(n) \quad (3)$$
$$c = y \quad (4)$$
$$n = h \quad (5)$$

- Siempre verificar: ¿el sistema tiene solución (única)?

- Acá: cinco ecuaciones con cinco variables (c, y, n, h, w)

Ecuaciones que definen el EC de Robinson Crusoe

- Resolvamos las ecuaciones de equilibrio lo más lejos posible

- Igualando (1) y (2) y usando (4)

$$\frac{v'(n)}{u'(c)} = f'(n) \quad (*)$$

  Usando (3) y (4)

$$c = f(n) \quad (**)$$

- Entonces, (c, n) satisface $(*)$ y $(**)$

- ¡Pero estas ecuaciones son exactamente las mismas condiciones de equilibrio del problema del planificador!

- Entonces, la asignación del EC (c, n) satisface las mismas dos ecuaciones que la asignación óptima $(c^*, n^*) \Rightarrow$ EC = asignación óptima